JANVIER 2022 – Nº 171

la Gazette de la Société Mathématique de France

- **150 ans de la SMF** – Les mathématicien·ne·s autour de 1900
- **Mathématiques** – Homogénéisation stochastique : du qualitatif au quantitatif
- **Entretien** – avec Michèle Audin
- **Tribune** – Vers la fin des promotions nationales des enseignants-chercheurs



la Gazette
de la Société Mathématique de France

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France



À propos de la couverture. La figure de la couverture représente un certain type de pavage aléatoire et périodique du plan par des carrés (voir arXiv:1101.0223). Il est conjecturé que lorsque la taille du pavage (nombre de faces) tend vers l'infini et si l'on associe la même mesure à chaque carré tendant vers 0 (de sorte que l'aire totale soit fixée), cette mesure converge vers la gravité quantique de Liouville avec $\gamma = \sqrt{2}$ sur le tore (voir la galerie de Timothy Budd pour une animation interactive de ces pavages). (crédit : Timothy Budd).

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Nº 171

Éditorial

Nous célébrons en cette nouvelle année les 150 ans de la Société mathématique de France, et commençons à oublier les 150 ans de la Commune de Paris, dont le souvenir resurgira sans doute en 2070 (si c'est autorisé alors). Quel rapport me direz-vous ? Eh bien, lisez l'interview passionnante, directe et sans fard de Michèle Audin. Vous y découvrirez sans doute comment cette célèbre mathématicienne est devenue historienne reconnue de la Commune de Paris. L'élégante et très combinatoire *sextine* n'aura par ailleurs plus de secrets pour vous, ni les mystères du très select Oulipo. On croisera dans cette interview thématiquement variée, entre autres, des sous-variétés lagrangiennes, la géométrie comme mode original de communication entre fille et mère, un roman d'enfance malheureusement disparu, un tabou autour d'un célèbre mathématicien français, et un cas classique, personnel et récurrent de mansplaining.

Quant à la SMF et ses origines, un article rédigé par un historien répond à une question simple et naturelle : qui était mathématicien, mais également qui était mathématicienne, en 1900, en France et ailleurs ? Plutôt qu'éventer les conclusions souvent surprenantes de ce travail impressionnant, voici quelques questions ludiques : à votre avis, combien y avait-il de personnes à l'ICM parisien de 1900 ? 50, 100, 250, 500 ou 1000 ? De combien de membres pouvait alors s'enorgueillir la SMF ? Quel était le métier du correspondant malgache de l'Académie des sciences en 1900 ? Y avait-il des étrangers à la SMF à cette date ? Qui étaient les deux mathématiciennes présentes à l'ICM de 1900 ?

Un premier article de mathématiques prend son départ au moment de cette prolifique charnière entre deux siècles. Il s'agit de savoir quoi faire avec les équations modélisant des systèmes physiques perturbés par de l'aléa, comme les équations de Maxwell au sein d'un conducteur grevé d'impuretés. Les théorèmes présentés mettent en jeu les luttes entre les différentes échelles de temps et d'espace, l'enjeu étant de transformer le problème initial en un problème plus simple, si possible déterministe. On y verra habilement mis en scène le premier exemple historique de ce type de problème, avec une solution contre-intuitive de sucroît. Et comme appât un

peu malhonnête de ma part, une *cape d'invisibilité* vous attend [1].

Simplifier mathématiquement un problème physique tout en restant réaliste, c'est formidable, mais parfois les mathématiques sont *conceptuellement* à la traîne de la physique. L'exemple le plus rageant et fascinant pour nous est sans aucun doute celui des intégrales de chemins de la mécanique quantique. Ces intégrales sont l'un des plus beaux outils de la physique des particules comme de la matière condensée, et depuis Witten et consorts, de la géométrie, mais restent pourtant très peu comprises mathématiquement. Le second article de mathématiques de cette Gazette présente une avancée récente dans cette direction, avec de jolies expressions qui font rêver comme « gravité quantique ». Dans les faits, il ne s'agit pas de cape magique ou de voyage au sein des trous noirs, mais d'une construction probabiliste d'une mesure particulièrement retorse sur les métriques d'une surface réelle, la *théorie quantique des champs de Liouville*.

Fidèle à sa tradition engagée, la *Gazette* propose une nouvelle tribune concernant le jeune mathématicien Azat Miftakhov, toujours prisonnier politique en Russie. Vous pourrez lire également un article décrivant la situation kafkaïenne frappant les lauréats de l'agrégation sans stage. Nous publions enfin un texte des CNU 25 et 26, mais aussi du conseil permanent du CNU, après l'annonce très brutale et très inquiétante du ministère de faire disparaître les promotions nationales en 2023.

Avec le rapport de la section 26, on retrouvera un CNU pas beaucoup plus policé, puisqu'il y est dénoncé, par exemple, l'injustice subie par des collègues n'obtenant pas la PEDR parce qu'ils n'étaient pas salariés par la bonne université. Le rapport de la section 25 est lui plus classique, mais toujours très important pour notre communauté. Clairement institutionnel mais instructif, un rapport présente l'action de l'ANR concernant les mathématiques, et rappelle quelques lacs dans lesquels les déposant·e·s ne doivent pas tomber.

Vous avez bien sûr remarqué le nouveau nom de la *Gazette*. Le comité éditorial remercie les instances décisionnaires de la SMF pour ce changement qui était devenu indispensable. Bien sûr le sens a un peu varié, l'idée d'associer la *Gazette* à des personnes et pas à notre société savante séduisait beaucoup d'entre nous. Mais plus grand monde ne croit encore au masculin neutre pour les substantifs désignant des humains, et encore moins quand il s'agit de professions associées aux hommes. Diverses autres propositions avaient émergé, comme « *Gazette* des mathématiques » (version platonicienne), « *Gazette* des mathématicien·ne·s » (version inclusive à points médians), « *Gazette* des mathématiciennes et des mathématiciens »

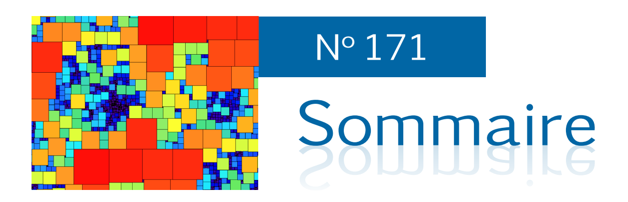
1. *Malhonnête*, car il faut avouer qu'on reste sur sa faim potterienne à ce sujet.

(version inclusive sans points médian mais longue !) ou encore « *Gazette* des mathématiciennes » (pour les cinquante prochaines années, histoire de rééquilibrer les comptes). Cette dernière m'avait bien plu mais n'a bizarrement pas été retenue. Bref, la *Gazette* des mathématiciens est morte, vive la *Gazette* de la Société Mathématique de France !

Toute l'équipe de la *Gazette* se joint à moi pour vous souhaiter une excellente année, si possible sans nouvelle lettre grecque virale, et une agréable lecture de cette *Gazette*.

Damien Gayet

la Gazette
de la Société Mathématique de France



Sommaire

150 ans de la SMF 1872-2022



Paris
16
au
18
Mars
2022

IHP
11 rue P. et M. Curie
75005 Paris

https://smf.emath.fr/150-ans-smf

Orateurs et oratrices :

- Francis Bach, INRIA
- Christophe Breuil, CNRS, Université Paris-Saclay
- Clotilde Fermanian, Université Paris-Est Créteil Val de Marne
- Catherine Goldstein, CNRS, Université de Paris, Sorbonne Université
- Pascal Hubert, Aix Marseille Université
- Fanny Kassel, CNRS, IHÉS
- Assia Mahboubi, INRIA
- Françoise Pène, Université de Bretagne Occidentale
- Michel Talagrand, Académie des sciences

Tables rondes :

À quoi sert la SMF ?

- Enseignement des mathématiques : où allons nous ?
- Faut-il jeter les maisons d'éditions à la poubelle ?
- Pourquoi la SMF doit-elle défendre les droits humains ?







Spectacles : « La Machine de Turing », « Galois, Poincaré, mythes et maths », « Jonglerie Musicale »











Inscription gratuite obligatoire



Mot du président

Chères collègues, chers collègues,

Je vous souhaite une très bonne année 2022.

La SMF a la joie d'annoncer qu'elle a lancé en décembre une opération que vous pouvez relayer généreusement : une offre d'abonnements électroniques gratuits à toutes nos revues aux universités et institutions africaines qui développent un programme de recherche en mathématiques. Ainsi les étudiant.e.s, chercheuses et chercheurs en mathématiques vivant en Afrique auront accès à des travaux de grande qualité leur permettant d'aller plus loin dans leurs recherches. Cette action est soutenue et relayée par l'UNESCO qui permettra une meilleure diffusion de cette offre.

Cette action est dans l'esprit de la « Science Ouverte » dans laquelle la SMF s'engage fortement. Une autre action au bénéfice de toutes et tous verra le jour au premier trimestre 2022. La SMF rendra gratuit l'accès électronique aux ouvrages déjà parus de ses collections de livres *Cours Spécialisés, Panoramas et Synthèse*, et, *Séminaires et Congrès*. Cette opération est soutenue par le Fonds National pour la Science Ouverte (FNSO) et l'INSMI. Cela correspond à plus de 100 ouvrages mis à disposition de la communauté des chercheuses et chercheurs en mathématiques. C'est une initiative semble-t-il unique en matière de publications de livres. Évidemment ceci est de nature à fragiliser nos ventes au format papier et donc l'équilibre économique de la SMF. Nous comptons sur vous pour soutenir ce dispositif, notamment en proposant à vos laboratoires et, ou, à vos bibliothèques d'acheter ces ouvrages. L'acquisition gratuite et électronique de l'ouvrage vous permettra d'en juger l'intérêt pour vous-même et sa qualité, puis, c'est notre pari, de l'acheter. Notez que la plus grosse vente de la SMF est un ouvrage dont la version électronique a été mise à disposition dès sa sortie... Au delà de l'achat, si vous souhaitez nous encourager dans cette voie, n'hésitez pas à en parler autour de vous, trouvez de nouvelles adhérentes et nouveaux adhérents ou bien faites un don à la SMF. La SMF agit pour la communauté mais a besoin de son soutien.

Moins enthousiasmant. Vous l'avez peut-être lu dans les colonnes de notre site web, la SMF s'est fait l'écho en 2021 de plusieurs notes d'informations

de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) du ministère de l'Éducation nationale, de la jeunesse et des sports, sur l'abandon massif de la spécialité Mathématiques entre la Première et la Terminale, et, son impact sur le volume d'heures enseignées au lycée. J'en rappelle ci-dessous les faits clés car il me semble important que nous les ayons toutes et tous à l'esprit. Sur près de 250 000 élèves qui avaient choisi la spécialité Mathématiques en Première en 2019-2020 (note 20.38 de la DEPP), plus de 100 000 l'ont abandonnée en passant en Terminale (note 21.22 de la DEPP). Il n'est pas simple d'obtenir des données précises sur le nombre d'étudiant.e.s nécessaires pour remplir les filières du supérieur nécessitant cette spécialité Mathématiques. À regarder les effectifs en première année de sciences, dans les CPGE et les classes préparatoires intégrées, on obtient environ 100 000 étudiant.e.s. Pour ces filières il apparaît donc qu'il ne devrait pas y avoir de problèmes de recrutement. Mais ce calcul n'est pas robuste puisque, par exemple, on peut imaginer que les élèves souhaitant faire médecine, pour partie, continueront à choisir cette spécialité. Il sera intéressant de faire un bilan sur les effectifs des filières scientifiques du supérieur lors de la rentrée prochaine. La note 21.22 de la DEPP indique par ailleurs de grosses différences sur les profils des élèves abandonnant la spécialité Mathématiques entre la Première et la Terminale. Ce sont 50% des filles qui abandonnent cette spécialité contre 30% pour les garçons. Les statistiques sont semblables lorsque l'on compare les élèves dits, dans cette note, « d'origine très favorisée » et les autres : les élèves d'origine très favorisée abandonnent beaucoup moins. Ainsi la composition des classes de spécialité Mathématiques en Terminale est très peu paritaire et ne reflète aucune mixité sociale.

Une conséquence de ces abandons concerne nos étudiant.e.s qui se dirigent vers l'enseignement dans le secondaire. La note 21.37 de novembre précise le volume total d'heures enseignées au lycée qui a disparu entre 2018 et 2020, et, qui ne tient pas compte de cette nouvelle baisse d'effectif. Il a baissé de 18,2%. Ainsi, nombre d'académies ont d'ores et déjà vu leurs besoins de vacataires en mathématiques fondre voire quasiment disparaître. Autre incidence, ces académies pourraient éprouver des difficultés à trouver des services d'enseignement à ces enseignants titulaires. Dans la précédente *Gazette* je signalais le cas d'une académie qui n'avait pas pu fournir de stages à deux de ses agrégés de 2021. L'un d'entre eux a été mis au chômage sous couvert d'un report de stage. Il a dû se trouver un emploi dans le privé pour 2021-2022 alors qu'il est agrégé de l'Éducation nationale ...

Finissons par quelques mots réjouissants. Les 16, 17 et 18 mars 2022 auront lieu des journées célébrant les 150 ans de la SMF. Cela se déroulera à

l'Institut Henri Poincaré. Elles seront composées d'exposés scientifiques, de trois tables rondes sur les droits humains, l'enseignement et l'édition. En soirée vous pourrez assister à des spectacles qui feront la part belle aux mathématiques. Le nombre de places étant limité, pour en profiter il faut s'inscrire sur notre site web.

Prenez soin de vous et de vos proches.

Le 3 janvier 2022

Fabien Durand, président de la smf



150 ANS DE LA SMF (1872-2022)

En avant-première du 150e anniversaire de la Société Mathématique de France qui aura lieu en 2022, la *Gazette* accueille une série d'articles proposés par des spécialistes en histoire des mathématiques

En avant-première du 150e anniversaire de la Société Mathématique de France qui aura lieu en 2022, la *Gazette* accueille une série d'articles proposés par des spécialistes en histoire des mathématiques, l'objectif étant de fournir divers éclairages sur l'histoire de la SMF depuis sa création en 1872 jusqu'à la période actuelle. Il s'agit par exemple de reconstituer des réseaux d'acteurs ayant favorisé le développement de la SMF à certaines périodes, mais aussi de mieux cerner comment ont évolué les fonctions et les buts de la SMF au cours du XXe siècle. Ces courtes contributions nous fourniront également quelques clés pour comprendre les rapports de la smf avec le milieu mathématique à certains moments de son histoire.

Dans le présent numéro de la *Gazette*, l'historien des mathématiques Laurent Rollet entend montrer comment se sont structurées diverses communautés mathématiques essentiellement en France autour de 1900. Pour ce faire, il s'appuie notamment sur la liste des membres de la SMF entre 1872 et 1918, tout en exploitant trois autres bases de données permettant de cerner plus globalement la variété des acteurs pratiquant des mathématiques ou ayant un intérêt pour les sciences mathématiques au tournant du XXe siècle.

Après avoir exposé les outils de recherche ayant permis de mener à bien cette enquête prosopographique, Laurent Rollet s'appuie sur ces mêmes outils de recherche pour discuter diverses manières de définir les acteurs pratiquant des mathématiques dans la période considérée. Il se propose ensuite de faire varier les échelles d'observation, évoquant alors tour à tour des mathématiques mondiales, parisiennes et provinciales, puis il montre que la plupart des acteurs faisant l'objet de son enquête combinaient en réalité plusieurs activités et pouvaient par exemple être professeurs, ingénieurs, militaires ou encore actuaires. Enfin, s'appuyant sur les quatre bases de données, Laurent Rollet complète son enquête, en s'intéressant aux identités des actrices ayant une pratique mathématique ou un intérêt pour les sciences mathématiques au tournant du XXe siècle.

Cette contribution permet donc de replacer la SMF et ses adhérents dans un cadre plus large reflétant la diversité et la complexité des communautés mathématiques au tournant du XXe siècle. Laurent Rollet insiste tout particulièrement sur les mérites d'une histoire des mathématiques par en bas, l'objectif étant d'attirer notre attention sur des pratiques mathématiques qui ne sont pas le seul fait de mathématiciens professionnels.

Christophe Eckes, Hélène Gispert

Compter, localiser, caractériser, genrer les mathématicien·ne·s autour de 1900. Un panorama prosopographique

• L. Rollet

Cet article entend explorer l'identité professionnelle des mathématiciens et mathématiciennes autour de 1900 ainsi que leur insertion dans des communautés mathématiques. J'utilise à dessein le pluriel et la forme mixte. Toute la question sera donc de savoir de quelles communautés il pourrait être question et qui sont ces acteurs et actrices de mathématiques. Parler d'une communauté revient à mettre en avant un groupe social au sein duquel les membres interagissent, partagent des biens, une culture, un langage, des intérêts, un patrimoine ou encore des valeurs communes. Mais autour de 1900, la communauté mathématique ne se réduit pas aux trente membres titulaires dans les sections de mathématiques de l'Académie des sciences ou aux 267 sociétaires de la Société mathématique de France. Il n'est d'ailleurs pas certain qu'on puisse considérer qu'il existe *une* communauté mathématique.

Qui sont les mathématiciens ? Combien sont-ils ? Comment se répartissent-ils en France et à l'étranger ? Quels types de fonction occupent-ils ? Quels sont leurs réseaux institutionnels ? Quelle place les femmes occupent-elles dans le paysage mondial ? Telles sont les questions que je me propose d'aborder ici en me concentrant sur le moment 1900 et en mobilisant une approche prosopographique. J'utiliserai pour ce faire 4 outils de recherche : les membres de la smf entre 1872 et 1918, les auteurs « mathématiciens » de l'Association française pour l'avancement des sciences entre 1872 et 1914, les auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* entre 1842 et 1927 et l'annuaire mondial des mathématiciens constitué par Charles-Ange Laisant et Adolphe Bühl en 1902. Mis côte à côte, ces corpus rassemblent des milliers de noms – sans doute plus de 6 000 – et leur exploration permet de dessiner les contours du paysage mathématique autour de 1900, un paysage dans lequel se côtoient, de manière très intriquée, des acteurs qui produisent des mathématiques (appelons-les des mathématiciens) mais aussi des acteurs qui les apprennent, qui les enseignent, qui les diffusent, qui les impriment, qui les lisent ou qui les appliquent.

J'ai choisi de me focaliser sur le moment 1900. Un tel choix se justifie par les changements importants qui affectent alors la marche des sciences : spécialisation disciplinaire, professionnalisation universitaire, internationalisation. À cette période, les mathématiciens des différents pays commencent à organiser les premiers congrès internationaux (Zurich en 1897, Paris en 1900, Heidelberg en 1904). Ils se soucient également beaucoup de l'organisation de l'information bibliographique à travers la création de revues dédiées– Bibliotheca mathematica fondée en 1887 par Gustav Eneström en est un bon exemple – ou encore la mise en place d'ambitieux programmes d'indexation bibliographique du savoir mathématique mondial [1]. Par ailleurs le développement des facultés des sciences de province et la mise en place de bourses de licence et d'agrégation à partir des années 1880 contribuent à mettre en place ou à renforcer des « écosystèmes » locaux de mathématiques. Ces changements s'inscrivent dans une forme d'institutionnalisation de la discipline à travers la constitution d'un grand nombre d'académies ou de sociétés savantes dédiées aux mathématiques dans la seconde moitié du xixe siècle : Société Mathématique de Moscou (1864), London Mathematical Society (1865), smf (1872), American Ma-

1. De ce point de vue, bien qu'il ne soit pas le seul, l'exemple du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques s'impose d'autant plus qu'il s'agit à l'origine, en 1885, d'une initiative de la smf [18].

thematical Society (1888), Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1890), Société Physico-Mathématique de Kazan (1890), etc.

Après avoir présenté brièvement les différents corpus exploités, je proposerai un parcours en trois temps visant à compter, à localiser et à caractériser les acteurs identifiés. Je le compléterai en examinant le statut des femmes représentées dans ces corpus et je conclurai par quelques remarques historiographiques et méthodologiques.

1. Mettre les mathématiciens en fiches

La prosopographie est une méthode qui trouve sa source dans l'épigraphie et l'histoire ancienne et qui a d'abord été utilisée pour étudier les filiations et les carrières des grands personnages. Longtemps considérée comme une discipline auxiliaire de l'histoire, elle a été largement revitalisée depuis quelques années au point de devenir une méthode historique standard dans un grand nombre de champs disciplinaires, dont l'histoire des mathématiques. Le développement de l'informatique, des bases de données et, plus récemment, des humanités numériques expliquent sans doute cette revalorisation dans bien des domaines, notamment en histoire des mathématiques [17, 8, 16]. Qu'il s'agisse d'étudier une institution, une société savante ou une communauté professionnelle la prosopographie a une forte valeur heuristique : en organisant des corpus de personnes autour de critères simples et objectifs (état-civil, lieux de formation, origines sociales, épisodes de carrière, etc.), elle permet de mener à bien des études qualitatives, quantitatives et comparatives [2]. Cette approche horizontale, qui les soumet aux mêmes filtres d'analyse, quel que soit leur statut, rend possible des analyses croisées sur la sociologie professionnelle, sur les circulations d'acteurs ainsi que des études institutionnelles de grande ampleur. Ces approches biographiques de masse permettent de reconstituer des systèmes de production, de diffusion et de légitimation des connaissances scientifiques dans lesquels la collecte des données, les échanges d'informations, la validation des connaissances dépendent de communautés d'acteurs très larges et souvent méconnues : des savants de premier plan, mais aussi des enseignants, des érudits, des éditeurs de journaux, des membres de sociétés savantes et professionnelles, des fabricants d'instruments, etc.

Les quatre bases de données exploitées dans cet article sont issues de projets de recherche collectifs, menés depuis plus de 20 ans. La première base concerne les membres de la SMF entre 1872 et 1918. Dans les années 1980, Hélène Gispert avait élaboré une première base de données dédiée à l'étude des membres de cette société. Son travail, fondateur pour toute une génération d'historiens, avait débouché sur la publication d'un ouvrage *La France mathématique : la Société mathématique de France (1870-1914)* [11]. L'évolution des outils informatiques avait malheureusement rendu obsolète cet outil. Face à l'impossibilité de récupérer les fichiers sources, les Archives Henri Poincaré ont entrepris un important travail pour reconstituer cette base de données. Il s'agit d'une nouvelle version intégrale car rien ne pouvait être repris des fichiers d'origine [3]. Les travaux d'Hélène Gispert, largement complétés et amendés récemment [12], ont mis en évidence l'importance de cette société savante pour la structuration de la communauté mathématique française. Elle en sera la principale représentante, composée essentiellement d'hommes [4] (elle aura accueilli 737 membres jusqu'en 1918). Du point de vue de sa composition, la société regroupe une majorité de mathématiciens professionnels très souvent actifs dans le champ de la recherche académique. De tous les outils mobilisés dans cet article c'est celui-ci qui contient le plus d'informations sur les parcours des acteurs.

La seconde base de données concerne les auteurs ayant publié des contributions dans les *Comptes rendus des sessions des congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences* entre 1872 et 1914. Ici encore il s'agit d'une reconstitution informatique. Au début des années 2000, Hélène Gispert avait dirigé un projet de recherche sur l'histoire de cette association. Il s'agis-

2. Cet objectif d'une homogénéité de traitement n'est pas toujours facile à atteindre. Les sources archivistiques sont très variables d'un acteur à l'autre surtout, comme on va le voir, pour les acteurs « secondaires » : professeurs de lycée, élèves de classes préparatoires, militaires, ingénieurs. Pour beaucoup de ces acteurs « secondaires » qui n'ont souvent pas ou peu produit en mathématiques, les recherches peuvent s'avérer particulièrement difficiles et souvent infructueuses.

3. Cette base de données est consultable en ligne : `http://prosopomaths.ahp-numerique.fr/annuaires`. Elle peut également être téléchargée dans un format libre. Les résultats présentés ici utilisent une version amendée et retravaillée de la base par rapport à la base mise en ligne.

4. On ne recense que 5 femmes, la plus célèbre étant Sofia Kovalevskaïa. Je reviendrai plus tard sur la place des femmes dans ces corpus.

sait de constituer un corpus de recherche à partir des contributeurs des sessions des congrès qui chaque année se déroulaient dans une ville différente. Le projet avait débouché sur l'ouvrage *Par la science, pour la patrie. L'Association française pour l'avancement des sciences (1872-1914) : un projet politique pour une société savante* [13] mais la base de donnée était devenue inexploitable. Il a cependant été possible de convertir les fichiers initiaux, de reconstituer les différentes tables et de les lier entre elles pour produire une nouvelle version [5]. Cette base est beaucoup plus fragmentaire s'agissant des mathématiques : elle recense 5 573 auteurs pour 17 814 références bibliographiques *toutes disciplines confondues* ; cependant, les contributions relevant des mathématiques ne dépassent pas les 1 200 pour 322 auteurs [6]. En termes de contenus, cet outil consiste essentiellement en une compilation bibliographique et il ne contient guère que les informations liées aux tables des matières des ouvrages tirés des sessions annuelles des congrès.

La troisième base de données rassemble les auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques*, une revue de mathématiques destinée aux *candidats* – le masculin est de rigueur – préparant les concours des grandes écoles. Cette revue avait été créée en 1842 par les mathématiciens Olry Terquem et Camille Gérono. Elle devait disparaître en 1927. Dès l'origine elle visait un public « mixte » d'étudiants, d'enseignants ou d'acteurs divers intéressés par les mathématiques du niveau des programmes des classes préparatoires ou de l'enseignement secondaire. Cette base de données a été construite dans le cadre d'un important travail collectif – coordonné par Philippe Nabonnand et moi-même – et donne à voir une population très diversifiée d'acteurs des mathématiques [7]. Elle recense 1 860 auteurs – uniquement des hommes – et près de 11 400 contributions, dont un peu moins de la moitié se compose de jeux de questions / réponses publiées d'un fascicule à l'autre.

La quatrième et dernière base de données a été constituée à partir des informations publiées en 1902 dans un imposant *Annuaire des mathématiciens* [15]. L'idée de faire paraître un tel ouvrage avait été proposée par le mathématicien suisse Ferdinand Rudio (1856-1929) dès 1897, lors du premier Congrès international des mathématiciens, à Zurich. Il faut dire qu'à cette époque, dans un contexte de professionnalisation et d'internationalisation grandissantes, la communauté mathématique était en pleine transformation : la constitution d'un système efficace d'information bibliographique devenait une question centrale, de même que l'organisation des échanges entre mathématiciens au niveau international. Laisant, qui entretenait de très bons rapports avec l'éditeur Carré & Naud, éditeur de la revue *L'enseignement mathématique*, reprit l'idée de Rudio et y associa Adolphe Bühl, alors en début de carrière. Son projet était de profiter de l'organisation du deuxième Congrès international des mathématiciens – à Paris, en 1900 – pour recueillir les informations nécessaires à sa constitution. L'ouvrage consiste en une imposante compilation alphabétique de 6 743 noms de « mathématiciens » et « mathématiciennes » sur 470 pages ; elle fut essentiellement établie à partir d'annuaires de sociétés savantes françaises et étrangères et aussi probablement à l'aide d'autres sources plus difficiles à identifier. Chaque notice contient le plus souvent le statut professionnel, la ou les attache(s) institutionnelle(s) de la personne, son adresse postale et son pays de résidence [8].

2. Compter : il y a les mathématiciens qui comptent et ceux qu'on compte

Comment compter les mathématiciens à une époque donnée ? Cette question difficile renvoie à une autre question, non moins redoutable. Qui considère-t-on comme mathématicien ? On pour-

5. Cette base de données a été reconstituée aux Archives Henri Poincaré et elle est consultable à l'adresse suivante : `http://prosopo.ahp-numerique.fr/s/afas/page/accueil`. La base d'origine avait par ailleurs fait l'objet d'une publication [19]. Du fait de sa structure complexe, les possibilités d'interrogation demeurent limitées.

6. Il est difficile de faire des estimations plus précises en raison des limitations du corpus mis en ligne. De plus, les textes relevant des mathématiques dans les publications de l'association étaient placés dans un catégorie plus générale intitulée « Mathématiques, astronomie, géodésie et mécanique ». Je n'exploiterai cet outil que pour l'année 1900.

7. Cette base de données est consultable en ligne : `http://nouvelles-annales-poincare.univ-lorraine.fr`. Elle peut également être téléchargée dans un format libre. Les résultats présentés utilisent une version amendée et retravaillée de la base. Les volumes de la revue ont été numérisés et sont disponibles sur NUMDAM : `http://www.numdam.org/journals/NAM/`.

8. Cette base de données a été élaborée aux Archives Henri Poincaré et elle est consultable en ligne : `http://prosopomaths.ahp-numerique.fr/annuaires`. Elle peut également être téléchargée dans un format libre. Les résultats présentés ici utilisent une version amendée et retravaillée de la base.

rait sans doute considérer que ne doivent compter *que les mathématiciens qui comptent*, à savoir ceux qui disposent d'une maîtrise importante de la recherche de leur époque ou qui contribuent significativement au développement de la science mathématique. Ce critère restrictif semble plutôt en phase avec la modernité. Cependant, il est loin d'être nouveau. Ainsi, lorsqu'en 1885 s'est dessiné le projet de constitution d'un *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, ses promoteurs exclurent les ouvrages destinés à la préparation des examens et les manuels destinés aux étudiants mais ils ouvrirent la possibilité de sélectionner les ouvrages mixtes pouvant contenir des résultats nouveaux. De fait, cette décision revenait à exclure de cette bibliographie collective les apports réalisés par des mathématiciens actifs et dont l'impact sur la communauté mathématique pouvait s'avérer essentiel étant donné les tirages très importants de certains manuels, sans cesse réédités. De la même manière, le choix opéré était de ne prendre en considération que les travaux de mathématiques appliquées *apportant un progrès pour les mathématiques pures* [18, p. 20]. Mais cette sélectivité peut être mise en perspective en la confrontant avec la volonté d'ouverture plaidée par Laisant et Bühl dans l'avant-propos de leur annuaire mondial des mathématiciens en 1902. Leur projet était très nettement d'intégrer dans leur projet les acteurs de l'enseignement secondaire : « Nous nous proposions de donner une liste de mathématiciens ; qu'est-ce qu'un mathématicien ? Où arrêter une telle liste, qui pourrait au besoin s'étendre du plus illustre de nos savants jusqu'à l'enfant qui balbutie à l'école les premiers éléments de la science ? Il nous a semblé qu'il fallait ici se montrer très large, et comprendre sous cette dénomination :

1. les membres de toutes les sociétés mathématiques, ou, dans les sociétés scientifiques d'ordre général, ceux qui en font partie comme représentants la science mathématique (en incluant l'astronomie) ;
2. les auteurs ayant publié, dans un recueil ou sous forme d'ouvrages, des travaux mathématiques originaux, et non pas de simples solutions d'élèves ;
3. les personnes qui, par leurs fonctions, sont appelées à enseigner spécialement la science mathématique, ou l'une de ses branches, quel que soit le degré de l'enseignement. [15, p. IV] [9] »

Si on en arrive maintenant au moment 1900, quelques points de comparaisons permettent de faire bouger le curseur d'extensivité des termes de « mathématiques » et de « mathématicien ». On peut ainsi compter les mathématiciens qui comptent, par exemple en évaluant leur présence au sein de l'Académie des sciences. L'Académie des sciences rassemble alors 30 membres titulaires relevant des sections de sciences mathématiques [10] et 42 membres correspondants (sur 116 en tout). Sans anticiper sur les questions de répartition géographique des acteurs il faut préciser que les correspondants sont par définition des acteurs ne résidant pas à Paris ou en France. Les correspondants français sont au nombre de 12 contre 30 correspondants étrangers. La section de géométrie compte alors 6 membres titulaires et 6 membres correspondants dont 1 français. Il est également possible de s'intéresser aux participants du Congrès international des mathématiciens qui a lieu à Paris du 6 au 12 août 1900. Durant cette semaine, le congrès rassemble 251 mathématiciens, soit 84 Français et 167 étrangers [9]. En 1900, la smf compte quant à elle 268 membres – elle atteindra son maximum en 1908 avec 295 membres – dont 205 Français et 63 étrangers. Comme on le verra par la suite, bien que cette société regroupe d'abord des mathématiciens actifs dans le champ académique, elle compte aussi parmi ses membres des personnes dont les activités dépassent largement ce cadre. Mais si l'on décide de suivre les recommandations d'ouverture de Laisant et de Bühl on atteint alors des chiffres sans commune mesure. À en croire leur annuaire mondial il y aurait eu en effet, en 1902, 6 743 mathématiciens, dont 2 526 en France et 4 217 dans les autres pays. Mais qui sont-ils ? Où exercent-ils ? À quel titre peuvent-ils se retrouver dans une telle publication, sachant que les membres de la smf ou de l'Académie des sciences ne constituent qu'une infime partie de l'ensemble ?

9. On notera d'ailleurs que Laisant était une sorte de pivot de la communauté mathématique puisqu'il était associé au fonctionnement de la smf, du répertoire bibliographique des sciences mathématiques [14] et des *Nouvelles annales de mathématiques*, en tant que rédacteur de la revue, de 1896 à 1920. Sur son parcours très riche voir [1].

10. Il y en a alors cinq, dont les intitulés montrent à quel point les frontières disciplinaires peuvent varier temporellement : géométrie, mécanique, astronomie, géographie et navigation, physique générale.

En 1900, les *Nouvelles annales de mathématiques* accueillent les publications de 56 auteurs [11] mais seules 34 d'entre eux sont enseignants et moins de 15 enseignent à l'université ou dans une classe préparatoire. Les autres sont des élèves de classes préparatoires, des étudiants de l'École polytechnique ou l'École normale supérieure, des militaires, des amateurs, rarement des femmes. Et dans une approche similaire, il faudrait aussi mentionner le cas des mathématiciens de l'Association française pour l'avancement des sciences qui, en 1900, tient son congrès annuel à Paris. Sur les 314 contributions proposées, 22 seulement entrent la section mathématique et sont produites par 20 auteurs dont une dizaine vivent et travaillent dans une petite ville de province qui ne possède pas de faculté des sciences.

Finalement quel serait le bon étalon de mesure, la bonne unité de compte ? Tout dépend sans doute de la manière dont on veut caractériser l'activité de production mathématique : au-delà de la distinction entre mathématiques pures et mathématiques appliquées, qui semble déjà très importante pour les acteurs de l'époque, il convient sans doute de faire une distinction entre ceux qui produisent des mathématiques, ceux qui rendent possible cette production – qu'ils soient enseignants, éditeurs ou imprimeurs, voire mécènes – et ceux qui manifestent un intérêt pour la discipline, au point parfois de contribuer aux activités de certaines communautés. Il convient aussi sans doute de ne pas prendre pour seul critère une forme d'excellence académique car cela aurait pour conséquence d'occulter une large part de la vie des mathématiques. Il y a certes des *sans nom*, des *sans œuvre*, mais beaucoup d'entre eux ne sont pas *sans activité*. C'est une des vertus des approches prosopographiques de rendre compte de cette complexité.

Comme on le voit, compter revient à sélectionner et à étalonner. Il ne s'agit d'ailleurs pas uniquement d'un débat historique. En 2002, la SMF et la Société de mathématiques appliquées et industrielles publiaient une brochure de vulgarisation scientifique intitulée *L'explosion des mathématiques*. Une des contributions, rédigée par Jean-Pierre Bourguignon, avait pour titre « Les mathématiciens en France et dans le monde » et s'ouvrait sur le chapeau : « Jusque vers la fin du XIXe siècle, les "géomètres", comme on appelait jadis les mathématiciens, étaient peu nombreux. En un siècle, leurs rangs se sont considérablement renforcés. Aujourd'hui, ils doivent faire face à une profonde mutation de leur discipline » [2, p. 92]. L'article se poursuivait en estimant la communauté mathématique en 1900 à quelques centaines d'individus contre probablement près de 80 000 un siècle plus tard. Une telle évaluation s'appuyait sur une définition restrictive des mathématiques qui ne prenait en compte que les personnes ayant atteint un niveau de formation équivalent à la thèse et dont la profession accorde une place véritable à la recherche mathématique ou à l'assimilation de ses résultats. Elle excluait de fait un très grand nombre d'acteurs, notamment les professeurs du secondaire.

3. Localiser : mathématiques mondiales, parisiennes et provinciales

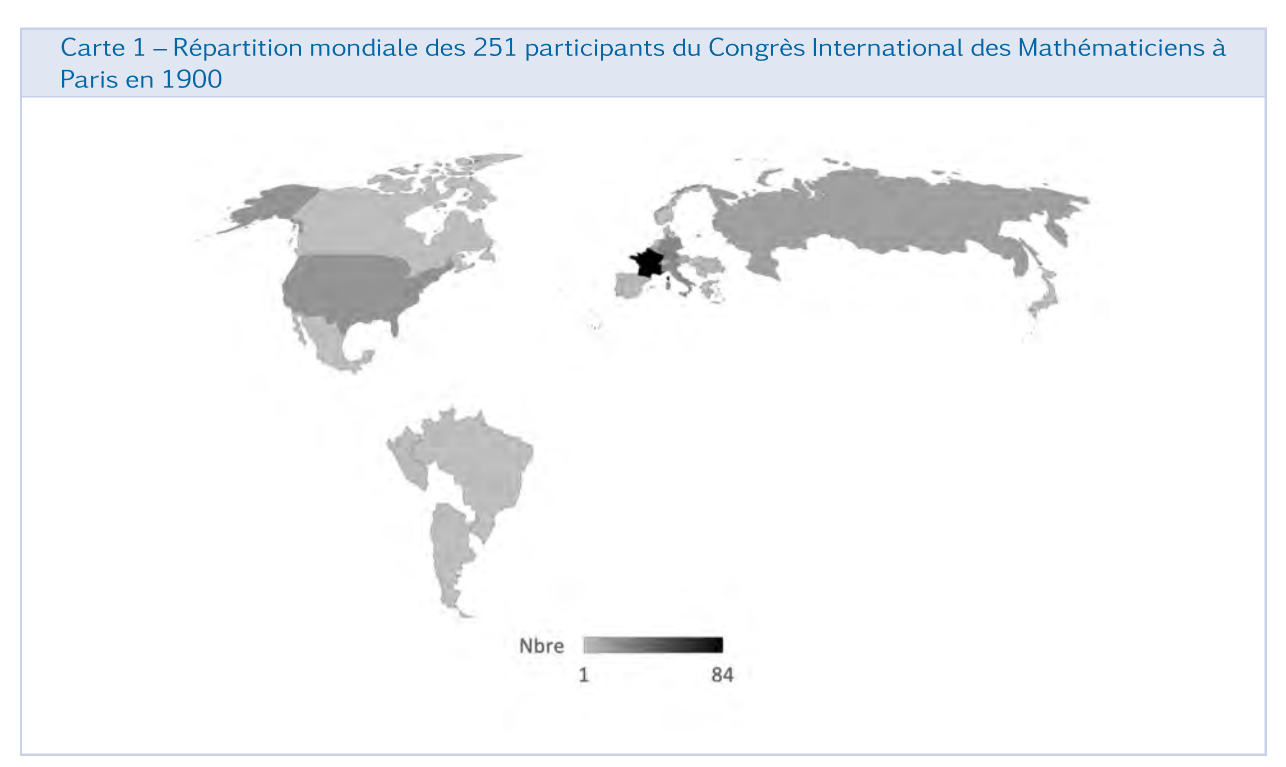
Les mathématiques circulent dans le temps, dans des espaces et des institutions. L'établissement de cartes statiques ne permet pas de discerner clairement cette dimension dynamique de la vie de la discipline. Pour autant, elle met en évidence son inscription dans une forme de mondialisation. Reprenons les données des différents corpus mobilisés dans cet article.

Le Congrès International des Mathématiciens de 1900 réunit des représentants de 27 pays différents, France comprise. Dix-huit d'entre eux n'envoient qu'un ou deux représentants mais 7 en envoient 5 ou plus : 7 pour la Suisse, 7 pour l'Autriche, 11 pour la Belgique, 12 pour le Royaume-Uni, 12 pour les pays scandinaves, 14 pour la Russie, 19 pour les États-Unis, 22 pour l'Italie et 27 pour l'Allemagne [9, p. 3-10]. Une telle répartition ne nous apprend que peu de choses sur la géographie globale des mathématiques de recherche de l'époque (carte 1). Dans le même ordre d'idée, la section des sciences mathématiques de l'Académie des sciences en 1900 rassemble des acteurs venant de 17 pays, France incluse. On pourrait être surpris de voir apparaître, l'île de Madagascar ou encore la Chine dans cette répartition mondiale des acteurs (carte 2) mais les deux personnes sont des religieux en mission relevant de la section de géographie et de navigation. Les nations les plus représentées sont la Russie (2), les États-Unis (3), l'Italie (3), l'Allemagne (6) et le Royaume-Uni (6). Le cas de la SMF est sans doute plus intéressant. Bien que sa création s'inscrive dans un projet patriotique lié à l'après 1870, la

11. On compte dans cette année 53 articles, 64 propositions de questions à résoudre et 15 résolutions de questions. La revue accueille 56 auteurs, dont 17 sont membres de la SMF (30%).

société rassemble une forte proportion de membres étrangers : sur les 737 membres qu'elle compte entre 1872 et 1918, 180 d'entre eux sont originaires de 32 pays différents. On y retrouve des représentants des grandes nations scientifiques comme l'Allemagne (31), les États-Unis (29) ou l'Italie (21), mais également des acteurs vivant au Salvador, en Colombie, en Inde ou au Japon. Cette répartition mondiale se retrouve de manière évidente en 1900 : sur les 268 membres qu'elle compte cette année-là 63 sont étrangers (carte 3). En ce qui concerne l'annuaire de Laisant et Bühl on atteint des chiffres autrement plus importants. Les 4 217 mathématiciens étrangers identifiés se répartissent dans 53 pays (carte 4) dont certains n'apparaissaient pas dans les autres corpus : Pérou, Mozambique, Australie, Venezuela, Tunisie, etc.

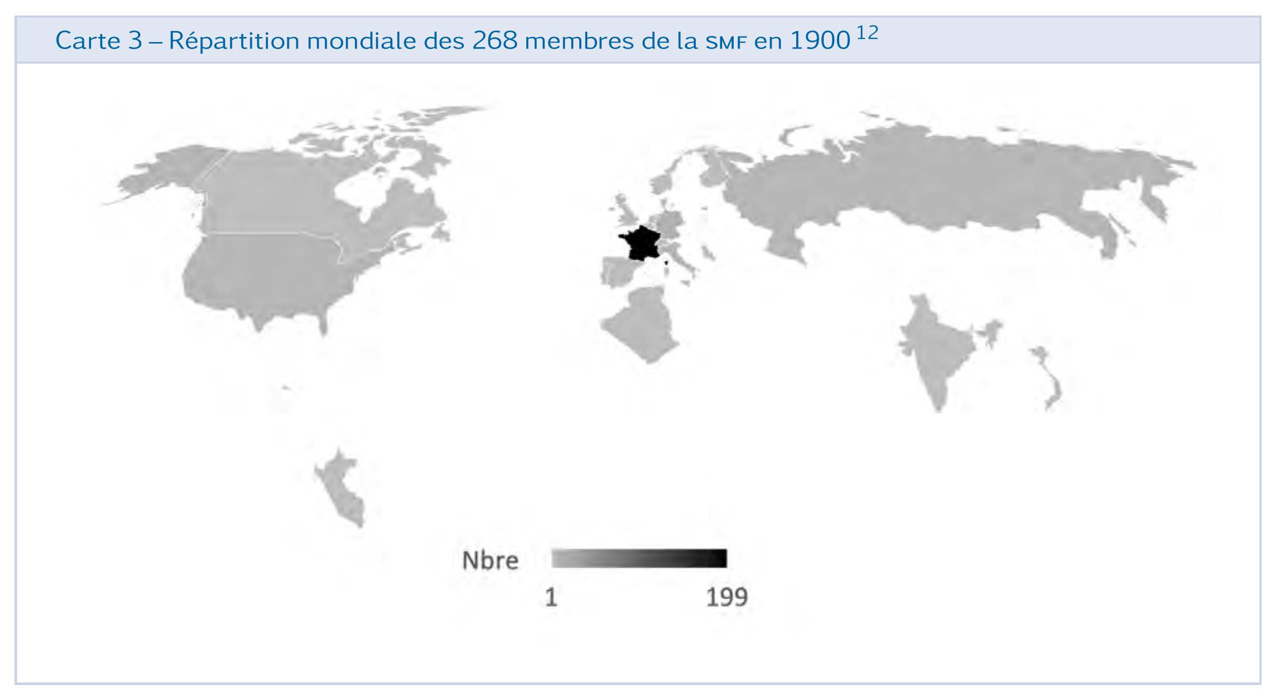
Carte 1 – Répartition mondiale des 251 participants du Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900



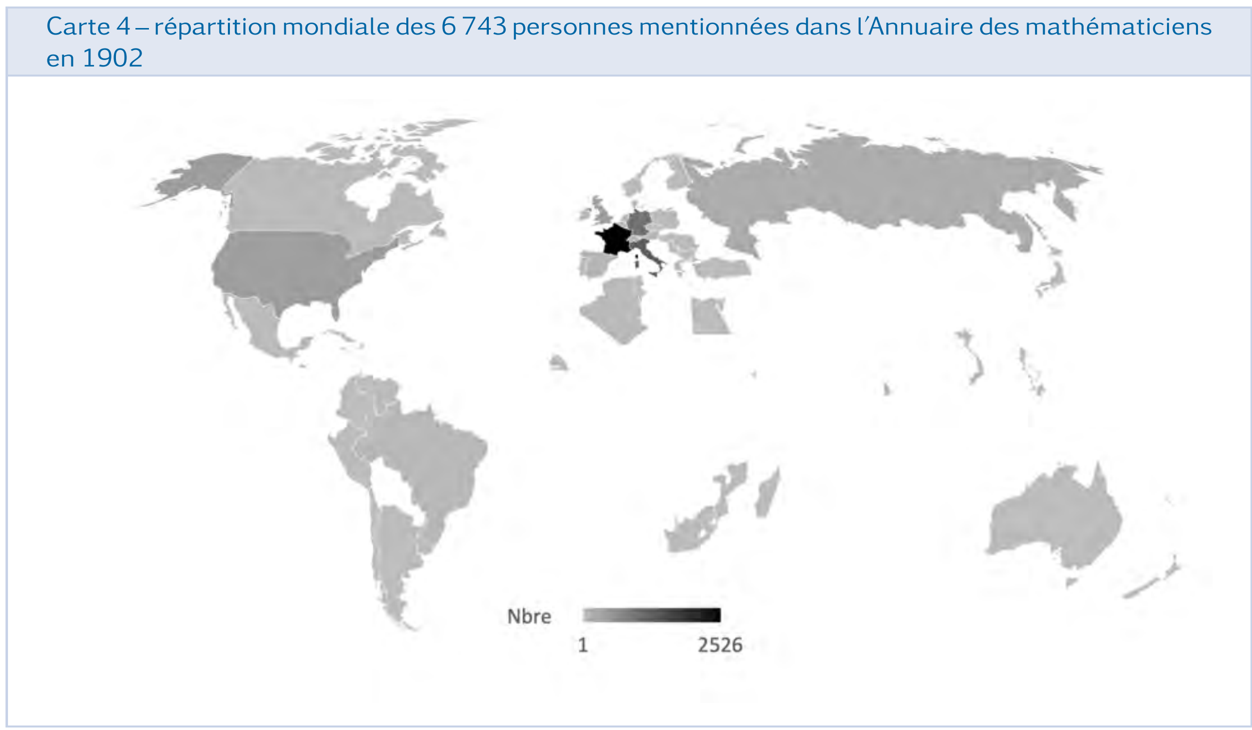
Carte 2 – Répartition mondiale des 72 membres titulaires et des correspondants des sections de sciences mathématiques de l'Académie en 1900

Nbre
1
42

Carte 3 – Répartition mondiale des 268 membres de la SMF en 1900 [12]



Carte 4 – répartition mondiale des 6 743 personnes mentionnées dans l'Annuaire des mathématiciens en 1902



Si l'on s'intéresse maintenant aux *Nouvelles annales de mathématiques*, journal dédié à la préparation des concours des écoles *françaises*, il est frappant de constater que durant ses 85 années d'existence elle parviendra à rassembler des auteurs de 41 nationalités différentes. S'agissant des 56 publications de l'année 1900, on trouve 35 contributions faites par des Français, 6 par des Italiens, 3 par des

12. Ces données concernent le lieu de résidence des membres *au moment de leur adhésion* et non en 1900. Les listes annuelles publiées dans le *Bulletin de la SMF* n'actualisaient pas toujours les changements de résidence. On notera qu'en 1900, 35 personnes sont membres de la société depuis sa création en 1872. Cette année-là, la société enregistre 13 nouveaux sociétaires.

Tableau 1 – Répartition géographique des auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* entre 1842 et 1927 en fonction du lieu de résidence déclaré dans le titre de l'article

	Articles	Questions posées	Questions résolues
Nombre total de contribution entre 1842 et 1927	**5 228**	**2 316**	**2 888**
Nombre de contributions d'auteurs « étrangers »	977	632	523
Nombre de contributions d'auteurs français	*4 251*	*1 684*	*2 365*
Dont auteurs « parisiens »	2 121	939	902
Dont auteurs « provinciaux »	1 574	545	1 093
Dont auteurs non localisés	556	200	370

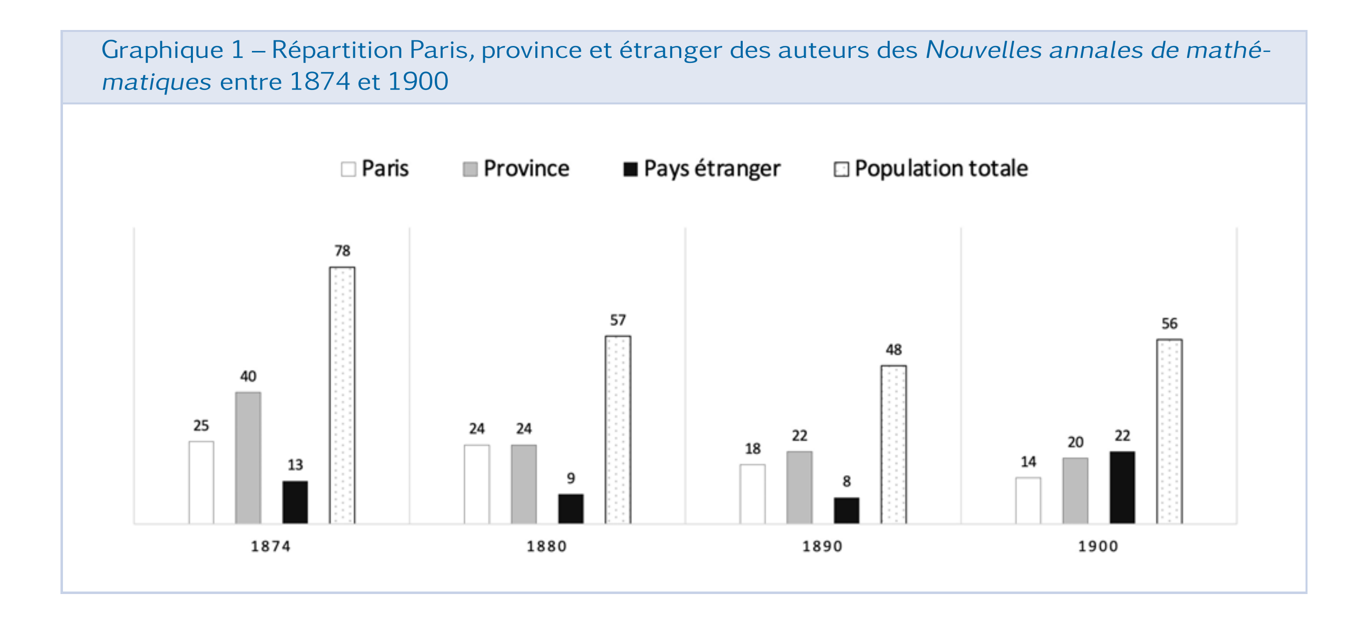
Allemands, 3 par des Suisses, 2 par des Hongrois, 2 par des Russes. On dénombre également une contribution belge et une contribution britannique (3 nationalités sont inconnues). Demeure le cas des 20 contributeurs mathématiciens de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences en 1900. Leur répartition se fait exclusivement en France : on compte 7 Parisiens, les autres étant situés dans de petites villes de province : Oyonnax, Béthune, Roubaix, Saint-Nazaire. Pour autant, cette répartition est porteuse de sens si l'on s'intéresse aux rapports Paris / Province. Car à trop regarder les cercles académiques prestigieux dans la capitale on risque de ne pas prendre au sérieux l'importance des élites locales. L'exemple de la ville de Metz est à ce titre assez éclairant. Son statut comme ville mathématique a fait l'objet d'une étude extensive pour la période 1750-1870 [3]. Une recherche systématique des acteurs mathématiques présents dans la ville sur cette période a permis d'en identifier près de 170, actifs dans un grand nombre de lieux : écoles régimentaires, École d'application de l'artillerie et du génie, petit et grand séminaire, école rabbinique, lycée (puis collège royal), faculté des sciences (de 1809 à 1815), Académie de Metz, école municipale de dessin, maisons d'impression et d'édition, Société d'Encouragement pour l'Enseignement élémentaire, etc. Jean-Victor Poncelet, dont une partie de la carrière est largement associée à la ville, est donc loin d'être un acteur isolé et il est en fait en contact avec un important réseau savant messin [4]. De plus, au XIXe siècle, la ville de Metz peut être considérée comme un pôle significatif pour la publication mathématique. Quatre familles de libraires, libraires éditeurs, imprimeurs et lithographes (soit une douzaine d'acteurs, sans compter les employés) se partagent un marché conséquent : entre 1800 et 1870 les maisons Devilly, Lamort, Thiel et Warion publient près d'une cinquantaine d'ouvrages de mathématiques, parmi lesquels une vingtaine seront coédités avec l'éditeur parisien Bachelier [5].

Indépendamment de cet exemple, un retour en 1900 confirme la nécessité de penser la dimension provinciale de l'activité mathématique. Lors du Congrès International de 1900, on recense 47 résidents parisiens et 37 issus de villes de province. Au sein des membres de la smf, la même année, le ratio s'établit à 118 Parisiens et 97 résidents en province. Les villes universitaires – Toulouse, Montpellier, Bordeaux, Nancy, Clermont-Ferrand – rassemblent une part non négligeable d'entre eux mais beaucoup viennent de petites villes telles que Châtellerault, Pontivy, Bar-Le-Duc, Rioz, Chartres. Du côté des *Nouvelles annales de mathématiques*, le constat est éclairant du point de vue de l'histoire globale de la revue et de la répartition Paris / Province (tableau 1). Durant ses 85 ans d'existence la revue a accueilli 5 228 articles, 2 316 questions posées et 2 888 propositions de résolutions. Les noms des auteurs des textes étaient généralement accompagnés d'une mention de leur statut et de leur lieu de résidence ou d'exercice (par exemple « étudiant en classes préparatoires au lycée de Versailles »), ce qui permet à la fois de situer géographiquement les auteurs et de documenter leurs déplacements et leur parcours de carrière lorsqu'ils publiaient plus d'une fois dans la revue [13]. L'exploitation de ces données permet de constater la part forte prise par les auteurs provinciaux dans son histoire (tableau 1).

De ce point de vue il peut être intéressant de suivre l'évolution de la part prise dans la revue par

13. C'est par exemple le cas de Maurice d'Ocagne qui contribua à la revue de manière quasiment continue de 1880 à 1922 et dont on peut suivre le parcours d'étudiant puis le parcours d'enseignant.

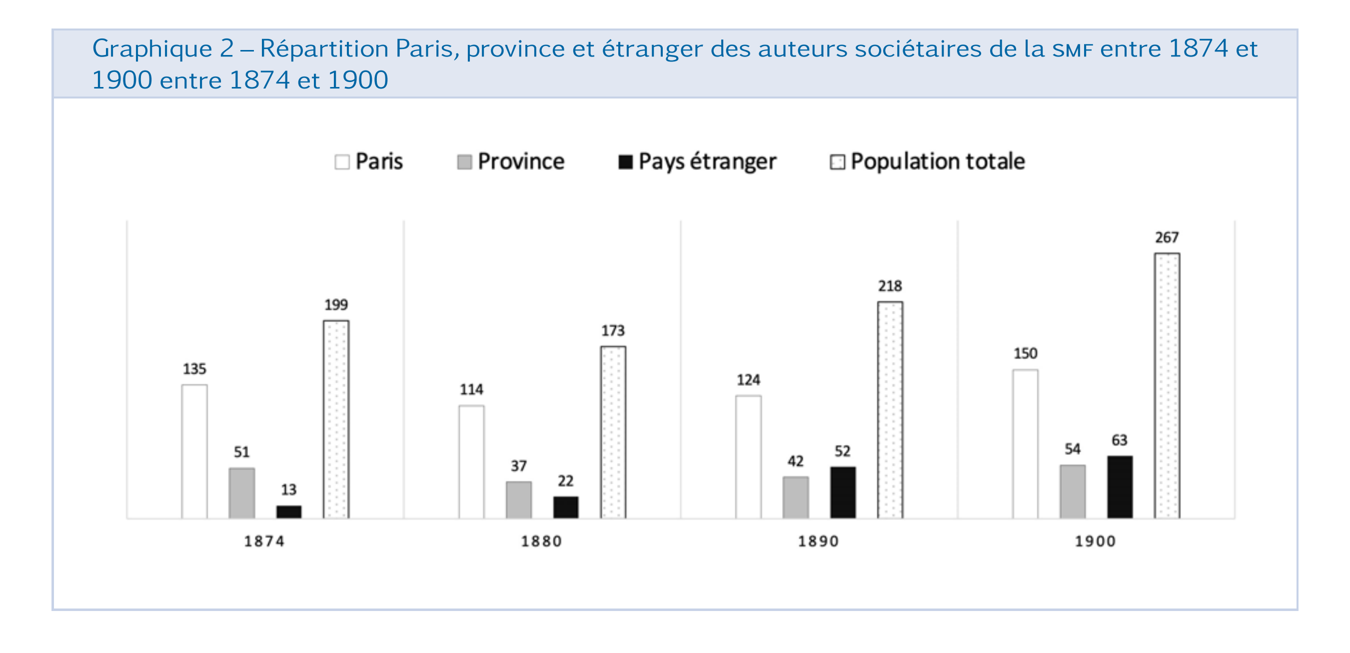
Graphique 1 – Répartition Paris, province et étranger des auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* entre 1874 et 1900



les auteurs vivant ou travaillant en province. Sur les 4 années de référence choisies, ceux-ci représentent entre 1/3 et la moitié de l'ensemble (graphique 1). Pour l'année 1900, les 34 auteurs français des fascicules de la revue se répartissent pour moitié à Paris. Les autres vivent et travaillent dans des villes de moyenne importance comme Nancy, Annecy, Charleville, Saint-Nazaire ou Clermont-Ferrand.

Ces chiffres peuvent être comparés avec ceux de la SMF. Entre 1872 et 1918 la société compte 737 sociétaires dont 175 étrangers. Parmi les sociétaires français, 405 vivent à Paris au moment de leur adhésion et 157 en province. Si l'on prend les mêmes années de référence que pour les *Nouvelles annales de mathématiques* on obtient à peu près la même répartition entre Paris et la province (graphique 2) [14].

Graphique 2 – Répartition Paris, province et étranger des auteurs sociétaires de la SMF entre 1874 et 1900 entre 1874 et 1900



14. J'ai choisi les années 1874, 1880, 1890 et 1900 car ce sont celles qui avaient été choisies par Hélène Gispert pour élaborer ses tableaux de données sur l'histoire de la société [12, Chap. VII]. La comparaison entre ses chiffres et les miens amène à constater quelques différences numériques sur certains points (sans doute liées à des erreurs de saisie et au fait que les deux outils de recherche ne sont pas identiques). Cependant les ordres de grandeur restent les mêmes.

Des recherches sur ces lieux permettraient sans doute d'identifier parfois des écosystèmes similaires à celui de Metz mais les études de ce type sont assez rares et demandent un investissement collectif conséquent. Des pistes prometteuses ont été ouvertes par les approches relevant de l'histoire *par en bas* et de l'étude des offres locales d'enseignement scientifique et technique [7] : l'ambition de ces travaux est de donner toute leur place aux acteurs locaux, aux configurations territoriales et aux lieux de production et de transmission des savoirs. Mener à bien un tel programme ouvre des perspectives heuristiques pour caractériser les communautés mathématiques dans une perspective élargie et il invite à penser finement les circulations des savoirs et des acteurs. Opposer la centralité parisienne aux périphéries provinciales en mettant l'accent sur « l'excellence » des institutions académiques de la capitale n'est pas sans poser quelques problèmes historiques : certaines villes de province sont des lieux de vie scientifique et peuvent être considérées comme des centres d'excellence à l'échelle de leur territoire ; de plus les acteurs parisiens sont aussi souvent des acteurs de province (Henri Poincaré commence sa carrière à Caen en 1879). Par certains côtés, même une périphérie provinciale peut constituer une forme de centralité.

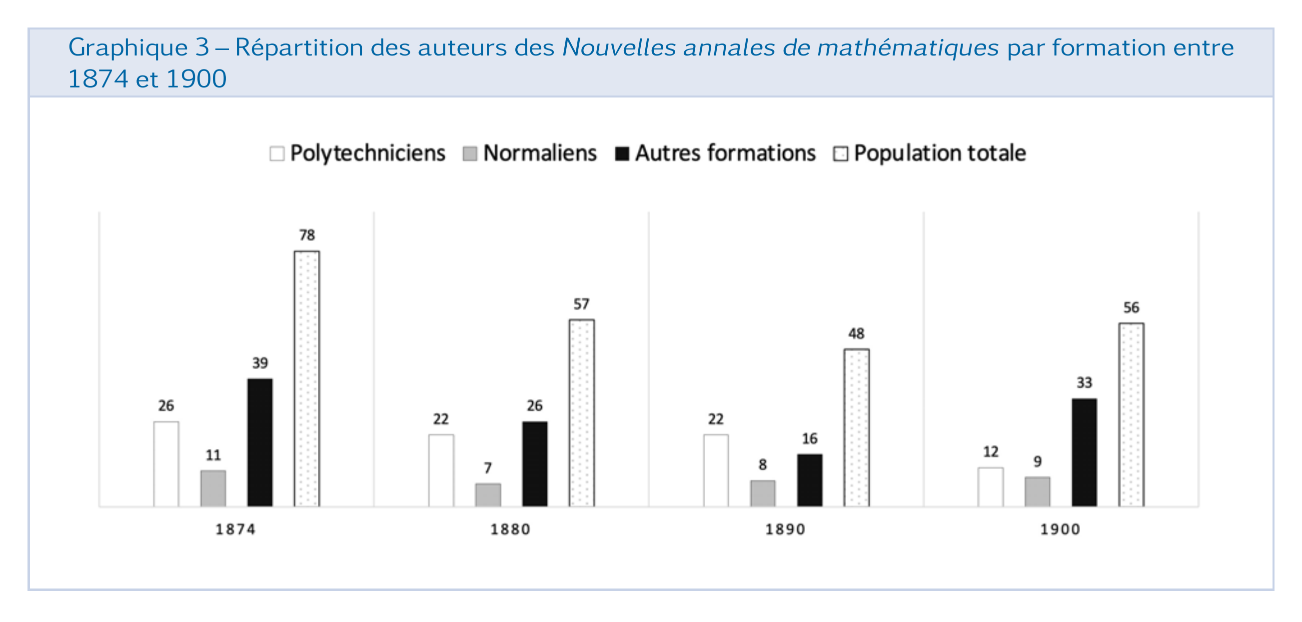
4. Caractériser : être mathématicien et… plusieurs autres choses

À supposer qu'on veuille bien prendre au sérieux une définition extensive du mot « mathématicien » il convient alors de les identifier et de caractériser au plus près leur activité et leurs modalités d'intervention en mathématiques. C'est là une chose aisée pour les membres des institutions académiques parisiennes et pour les mathématiciens dont les travaux ont donné lieu à une forme de patrimonialisation. C'est en revanche beaucoup plus difficile lorsqu'il s'agit de populations plus mélangées. Ainsi, fixer précisément l'identité des 1860 auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* s'est avéré très difficile dans la mesure où les auteurs – qui peuvent être des élèves de classe spéciale, des étudiants à l'École polytechnique, des professeurs de lycée voire des amateurs éclairés – apparaissent très souvent sans leur prénom et parfois sans aucun indice concernant leur activité professionnelle [15]. Une fois l'état civil fixé, il s'avère possible de caractériser un parcours de formation. Sur la période couverte le paysage de la formation mathématique est largement dominé par l'École polytechnique et par l'École normale supérieure. Les parcours en faculté existent mais demeurent moins nombreux étant donné le faible nombre d'étudiants en sciences en France avant les années 1880 [16]. Sur les 30 membres titulaires des sections mathématiques de l'Académie des sciences en 1900, 16 sont polytechniciens, 6 sont normaliens, 6 ont été formés dans des universités françaises ou étrangères et 2 sont issus de parcours plus spécifiques (École navale et formation civile des Mines). Pour la vingtaine de mathématiciens présentant une communication à l'Association française pour l'avancement des sciences en 1900, la part des polytechniciens est importante (entre 6 et 9 personnes) alors que celle des normaliens est très faible (2 personnes). Un regard sur les *Nouvelles annales de mathématiques* met en évidence la part prise par les polytechniciens dans la vie de la revue (en incluant les élèves). Sur ses 85 années d'existence elle accueille 484 polytechniciens et 218 normaliens, soit 26% de son effectif total (1860 auteurs) [17]. Un pointage sur 4 années de référence permet de rendre compte de l'évolution de la répartition des rôles (graphique 3). La part des polytechniciens passe de 33 à 21% entre 1874 et 1900 et celle des normaliens de 19 à 16%. Entre 1872 et 1900 la SMF compte quant à elle 192 polytechniciens, soit également 26% de son effectif total (737). La part des polytechniciens passe de 55 à 28% entre 1874 et 1900 quand celle des normaliens passe de 12 à 16% (graphique 4) [18].

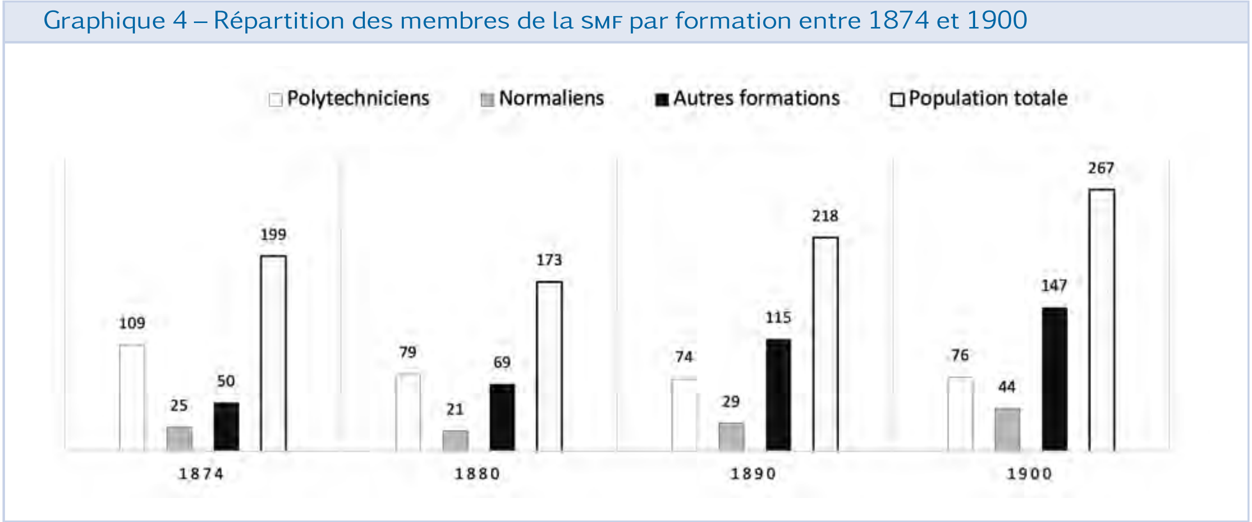
Ce basculement d'un lieu de formation à un autre doit être interprété comme un changement de configuration dans le monde académique, les normaliens prenant progressivement de l'ascendant dans le monde universitaire. Mais le phénomène le

15. Ajoutons que certains apparaissent sous un pseudonyme tels que Strebor, pour William Roberts.
16. En 1875 la France compte 9 963 étudiants toutes disciplines confondues mais plus de la moitié d'entre eux se concentrent à Paris et les étudiants en sciences ou en lettres ne représentent qu'une faible part en comparaison des étudiants des facultés professionnelles (droit et médecine). Un rééquilibrage s'amorce avec l'instauration des bourses de licences et d'agrégation dans les premières années de la Troisième République. En 1891, les étudiants en sciences représentent à peine 6% des 19 821 étudiants en France, et les « littéraires » 12%. En 1902, ce chiffre passe à 13% pour 30 370 étudiants et il est identique en Lettres [20, p. 261-262].
17. Les parcours de formation des 1 158 autres auteurs reste plus difficile à déterminer.
18. Dans les deux cas, ce pourcentage est calculé sur les part de français dans la population totale.

Graphique 3 – Répartition des auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* par formation entre 1874 et 1900



Graphique 4 – Répartition des membres de la SMF par formation entre 1874 et 1900



plus intéressant en termes d'extension de la communauté mathématique est peut-être ailleurs, dans la rubrique « Autres formations ». Celle-ci ouvre en effet des perspectives intéressantes pour penser d'autres modes d'entrée en mathématiques : on recense en effet 4 217 « mathématiciens » étrangers dans l'annuaire mondial de Laisant et Bühl et leurs profils peuvent être parfois surprenants voire assez peu académiques.

Les différents corpus exploités ici rassemblent les noms de milliers de personnes en lien avec les mathématiques (probablement plus de 6 000). Ils offrent la possibilité d'explorer l'extrême diversité des modalités d'intervention dans le champ des mathématiques. Certes, les sources consistent essentiellement en des listes de noms ou des annuaires ; elles sont donc intrinsèquement limitées et ne sauraient remplacer un *curriculum vitae* ou un dossier récapitulatif de carrière. En revanche elles présentent le grand intérêt de donner des indices sur l'identité professionnelle des acteurs et, dans une certaine mesure, sur la manière dont ils souhaitent s'afficher vis-à-vis de la communauté. Et de ce point de vue, on se rend assez vite compte que ces indices constituent une invitation à penser très largement l'identité professionnelle.

Beaucoup de ces acteurs ne s'identifient pas comme « mathématiciens » – le terme n'apparaît jamais dans les annuaires – mais comme professeurs, ingénieurs, militaires, académiciens, rentiers, actuaires, hommes de cour, diplomates, banquiers, ecclésiastiques, directeurs de pension, etc. Ils sont

donc mathématiciens *et plusieurs autres choses en même temps ou successivement*. Cela traduit une forme de polyactivité mathématique qui demande à être prise au sérieux d'un point de vue historique. Et elle est d'autant plus difficile à prendre en compte que se superposent alors potentiellement des statuts professionnels (professeur, ingénieur, militaire), des fonctions liées au statut (directeur d'établissement scientifique) et des registres d'activité mathématique sans lien avec la profession (on peut être capitaine dans un régiment de province et faire des mathématiques pour le plaisir).

Considérons ainsi les membres de la SMF. S'agissant d'une société plutôt liée au fonctionnement académique des mathématiques, le poids des enseignants y est important. Sur ses 737 membres jusqu'en 1918, 385 ont une activité en lien avec l'enseignement et 187 relèvent de l'enseignement universitaire. Pour l'année 1900, on recense 168 enseignants sur 267 sociétaires, dont 86 universitaires. Mais l'élément le plus significatif est peut-être qu'une part importante de ces universitaires (35) présente un profil mixte : ceux-ci sont professeurs d'université *et ingénieur, et militaire, et actuaire*, et [19] ... De la même manière, toujours en 1900, 27 militaires sont sociétaires de la SMF mais 18 d'entre eux ont un profil mixte ; et parmi les 48 ingénieurs, une trentaine peuvent être considérés comme relevant d'une forme de polyactivité [20].

L'annuaire mondial de Laisant et Bühl offre la même mise en abîme. Sur 6 743 personnes recensées en 1902, il est possible d'en identifier 3 972 dont les activités relèvent de l'enseignement et sans doute près de 1 000 universitaires. Mais le plus frappant est sans doute que près de 2 800 de ces enseignants ne sont pas uniquement des enseignants et affichent des formes d'activité mathématique plurielles. Cet annuaire permet par ailleurs d'identifier au moins 325 ingénieurs, 150 militaires, 84 directeurs d'établissements d'enseignement, 81 actuaires, 66 directeurs d'entreprises, 38 directeurs d'établissements scientifiques, 25 banquiers, 40 éditeurs, 48 « religieux », etc.

5. Où sont et qui sont les femmes ?

On ne trouve aucune femme à l'Académie des sciences en 1900 et on connaît bien l'histoire de la candidature infructueuse de Marie Curie en 1911 contre Édouard Branly. On n'en trouve pas plus chez les auteurs mathématiciens du congrès parisien de l'Association française pour l'avancement des sciences de 1900.

Pour autant les listes officielles du Congrès international des mathématiciens en 1900 contiennent les noms de 6 femmes [9, p. 3-10]. Toutes sont étrangères et trois semblent être présentes en tant qu'épouses : A. Jolles, épouse de Stanislas Jolles, professeur à l'École polytechnique de Berlin ; Vera de Schiff, épouse du colonel de Schiff, en poste à Saint-Pétersbourg ; la baronne Veronese, épouse de Giuseppe Veronese, professeur d'université et député à Padoue. La quatrième femme est Elna Munch (1871-1945), une mathématicienne danoise qui apparaît dans les listes sous son nom de jeune fille, Sarauw. Elle sera une des premières femmes diplômées en mathématiques dans son pays et elle aura une action politique en faveur du suffrage féminin. La cinquième est Olga Sabinine et la dernière Ely Achsale, professeure au Vassar College de New-York [21].

Dans les *Nouvelles annales de mathématiques* on ne parvient à identifier formellement que 5 femmes : Adolphine L., Olga Ermanska, Rita Murège, Anne de Préhyr et Odette Devisme. Seule Ermanska indique une profession (institutrice à Strasbourg) et aucune ne publie plus d'une année dans la revue, à l'exception d'Anne de Préhyr (6 contributions entre 1914 et 1916) [22].

On trouve enfin les noms de 5 femmes parmi les sociétaires de la SMF : Nanny Cedercreutz, Sofia Kovalevskaïa, L. Mantell, Theodosia Tarnarider. Cedercreutz est une scientifique finlandaise et il est sans doute inutile de présenter ici Kovalevskaïa. L. Mantell est identifiable simplement par une adresse et l'attribut « Mademoiselle », sans plus de précision. Quant à Tarnarider et Veil, elles apparaissent comme licenciées ès sciences. Tarnarider publiera

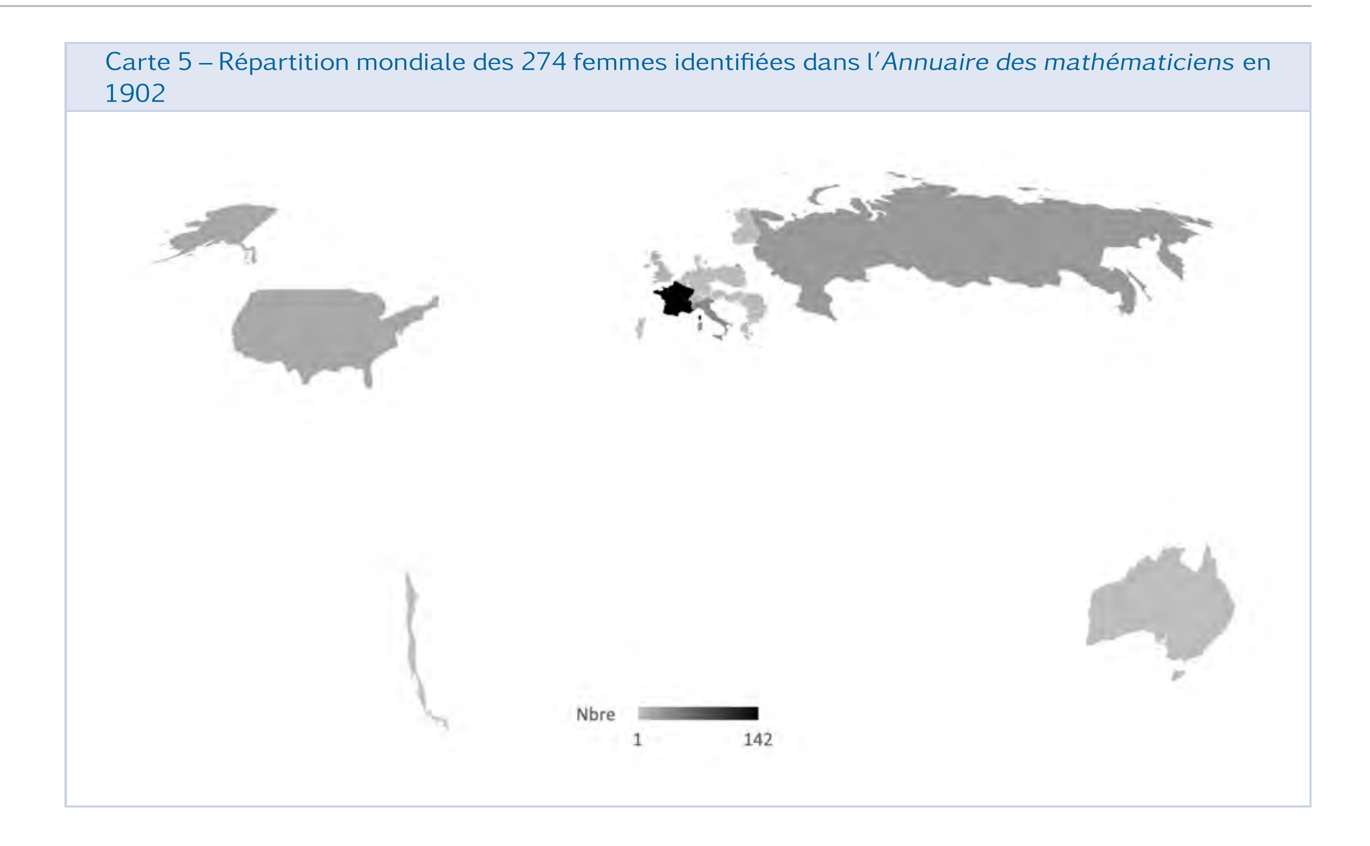
19. Et la situation est sans doute encore plus complexe lorsqu'on examine des dynamiques de carrière : Henri Poincaré a été ingénieur, puis professeur de mathématiques, puis « philosophe » et parallèlement académicien, membre du Bureau des longitudes, etc. La prise en compte de l'évolution temporelle en prosopographie peut s'avérer très complexe.

20. Jusqu'en 1918, on peut estimer que la SMF compte au moins 80 militaires, dont 36 relèvent de l'Artillerie et 26 du Génie. En 1900, on recense au moins 12 militaires de l'Artillerie et 14 du Génie. En ce qui concerne les ingénieurs, ce sont ceux relevant des Pont-et-Chaussées et des Mines qui dominent en 1900 (on en compte respectivement 19 et 7).

21. Pour quelques détails sur la participation féminine dans les congrès internationaux de mathématiciens voir [6].

22. La revue accueillant beaucoup d'articles anonymes ou sous pseudonymes il n'est pas exclu que la part des femmes y soit un peu plus grande. Elle demeure cependant impossible à tracer et sans doute assez minime.

Carte 5 – Répartition mondiale des 274 femmes identifiées dans l'*Annuaire des mathématiciens* en 1902



au moins une note dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et un article dans le *Bulletin des sciences mathématiques* en 1914. En 1900, Cedercreutz est la seule femme sociétaire de la SMF.

La situation est tout autre dans l'annuaire mondial de Laisant et Bühl. Au moins 274 femmes y sont recensées et se répartissent dans 20 pays (carte 5) : les pays européens rassemblent 230 de ces femmes (dont 142 en France, 39 en Italie, 10 au Royaume-Uni, 9 aux Pays-Bas, 2 en Allemagne), la Russie en compterait 26 et les États-Unis 16. On voit aussi apparaître le Chili ou l'Australie.

Le nombre relativement élevé de femmes françaises en mathématiques (142) semble surprenant à une époque où elles sont encore quasiment absentes des systèmes d'enseignement secondaire et universitaire (la loi Camille Sée organisant l'enseignement secondaire des jeunes filles a été votée en 1881). Le tableau ci-dessous (tableau 2) rassemble les maigres précisions disponibles sur les statuts professionnels de ces femmes pour la population globale, pour la France et pour l'Italie (ce sont les deux pays les plus représentés dans l'annuaire de Laisant). L'absence de profession signalée apparaît de manière massive, à l'exception de quelques exerçant des fonctions dans l'enseignement féminin. On ne compte que 4 femmes professeures d'université et elles exercent toutes aux États-Unis dans des villes de la côte Est [23].

En réalité on comprend mieux à quel titre ces femmes apparaissent dans cet annuaire lorsqu'on considère leurs attaches institutionnelles. En effet, 73% des femmes mentionnées dans l'annuaire y apparaissent au titre de leur appartenance à la Société astronomique de France, une société savante fondée par Camille Flammarion en 1887 et dont l'ambition était de promouvoir l'astronomie auprès du plus grand nombre. La société comptait des milliers de membres parmi lesquels de très nombreux amateurs et amatrices. Ainsi sur les 142 femmes présentes dans l'annuaire, 124 le sont parce qu'elles sont membres de cette société et c'est également le cas pour toutes les Russes ou les Suisses ; c'est moins évident pour les Italiennes. Si l'on compare la situation des femmes avec celle des hommes, on aboutit sensiblement au même constat. Sur les 6 469 hommes recensés dans l'annuaire, 1 351, soit 20%, sont membres de la Société astronomique de France : on compte 777 français,

23. Il s'agit d'Annie Louise Mackinnon (1868-1940), Ellen Hayes (1851-1930), Ruth Gentry (1862-1917) et Anna Lavinia van Benschoten. Six des 16 femmes américaines sont mentionnées comme membres de l'American mathematical Society.

Tableau 2 – Statuts professionnels des femmes recensées dans l'*Annuaire des mathématiciens* en 1902

Catégorie professionnelle	Population totale (274)	Part des femmes françaises dans la population totale (142)	Part des femmes italiennes dans la population totale (39)
Pas d'indication	207	124	2
Enseignement féminin	48	16	27
Enseignement université	4	0	0
Artiste	1	1	0
Propriétaire	1	0	0
Directrice d'établissement d'enseignement	2	1	0
Enseignante (écoles techniques)	4	0	3
Directrice d'établissement scientifique	1	0	0
Enseignement (sans précision)	3	0	4
Enseignement (école normale)	2	0	1
Dame de cour	1	0	1

99 Russes, 51 Italiens, 29 Allemands ou encore 33 britanniques. Par ailleurs 377 ne sont présents dans l'annuaire qu'à ce seul titre.

Deux conclusions découlent de ces quelques données. D'une part, le poids des membres de la Société astronomique de France nous renseigne sur la méthode de Laisant et de Bühl pour constituer leur annuaire. Il est difficile d'évaluer l'intérêt qu'a pu présenter leur travail pour la communauté de l'époque mais il frappant de constater l'intérêt que représente aujourd'hui leur outil pour les historiens. D'autre part, les « mathématiciennes » recensées dans l'annuaire de Laisant et Bühl ne sont probablement pas mathématiciennes dans le sens restreint du terme. Cependant, cela ne signifie pas pour autant qu'elles doivent être disqualifiées comme « actrices de mathématiques ». Au contraire, cette population de femmes ouvre de fécondes perspectives pour penser d'autres relations aux mathématiques que la recherche et elle permet aussi d'avoir une idée des filtres sociaux et politiques qui empêchaient au moins certaines d'entre elles de s'insérer d'une manière plus professionnelle au sein de la communauté.

6. Attrapez-les tou(te)s !

Pour conclure, ce parcours prosopographique pourrait être résumé en une formule assez simple, caractéristique d'une certaine manière de penser l'histoire des sciences : « Attrapez-les tou(te)s ! ». La prosopographie invite à penser les populations au sens large, sans (trop) de préconceptions disciplinaires ou hiérarchiques, en s'intéressant aux pratiques des acteurs et en pensant les modalités multiples d'ancrage des sciences dans la sphère sociale. De ce point de vue les « petits » acteurs comptent. Au total les quatre outils de recherche exploités regroupent, comme je l'ai déjà indiqué, plus de 6000 acteurs[24]. Ils dessinent un panorama assez vaste des personnes actives dans le champ des mathématiques au moins en France et – partiellement mais de manière significative – dans d'autres pays. Les trois premières bases de données contiennent des populations bien délimitées car elles sont identifiées par l'appartenance à une société savante ou à un réseau d'auteurs sur une période donnée. La dernière est quant à elle nécessairement ouverte dans la mesure où il est peu probable, malgré les 6 743 noms recensés, que Laisant et Bühl aient pu constituer une liste exhaustive de tous les mathématiciens dans le monde. On notera par ailleurs que ces 4 outils proposent des filtres intéressants pour penser les populations en termes géographiques : la France et ses colonies sont certes très représentées – et on ne rappellera pas ici la dimension patriotique qui sous-tend le projet de la SMF ou de l'Association française pour l'avancement des sciences – mais les pays étrangers n'en sont pas absents[25].

24. Cette estimation est faite en faisant abstraction de la présence simultanée d'un grand nombre d'acteurs dans ces quatre corpus.
25. Il est important de noter que ces quatre outils ne sont pas totalement homogènes en termes de structuration des données et de couverture temporelle. Dans chaque cas, le travail d'alimentation des bases de données a d'abord consisté à transposer au mieux les informations présentes en respectant le langage de la source. Des recherches complémentaires ont parfois ensuite été menées pour caractériser les acteurs en termes d'état civil, d'origine sociale, de formation ou de carrière mais il n'en demeure pas moins que ces outils ont été conçus au sein de collectifs différents qui ne se posaient pas les mêmes questions scientifiques et qui ne disposaient pas des mêmes moyens humains et financiers pour les alimenter.

Prôner, comme je l'ai fait, une histoire des mathématiques *par en bas* ne signifie certes pas que tous les acteurs se valent; cela serait d'autant plus difficile à soutenir que beaucoup d'entre eux n'ont laissé quasiment aucune trace historique si ce n'est par le biais de leur présence dans des listes de sociétés savantes (et je n'ai d'ailleurs cité que très peu de noms). Une telle stratégie de recherche ne remet pas en cause les hiérarchies existantes, qu'elles soient scientifiques, institutionnelles ou symboliques. On sait bien que le profilage des grands mathématiciens sera toujours plus riche – par définition et parce que les sources d'archives sont plus nombreuses – que celui des mathématiciens secondaires. Mais c'est justement parce qu'on a trop souvent voulu regarder l'histoire des mathématiques à travers le prisme des grands hommes – en oubliant au passage les femmes – que ce rééquilibrage au profit des acteurs « secondaires » peut s'avérer utile d'un point de vue heuristique.

On peut donc au moins prendre au sérieux l'idée d'une égalité de traitement des acteurs pour penser les mathématiques dans leur globalité. Cela revient en somme à plaider pour une approche sociale et matérielle de l'histoire des mathématiques. Cela invite aussi à penser les mathématiques dans le temps long, à travers les phénomènes d'inscription des acteurs et de leurs théories dans une mémoire et un patrimoine communs [10]. Il pourrait être tentant de ne considérer comme mathématiciens que les acteurs impliqués dans une activité de recherche et ce serait sans doute légitime à l'époque actuelle, en regard de la place prise actuellement par les sciences mathématiques dans toutes les sphères d'activité. Mais pour exister et pour s'exprimer l'abstraction et la créativité mathématiques doivent passer par des filtres sociaux qui s'avèrent inévitablement concrets et que les historiens des mathématiques doivent nécessairement prendre en compte.

Références

[1] J. Auvinet. *Charles-Ange Laisant : Itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*. Paris : Hermann, 2013.

[2] J.-P. Bourguignon. « Les mathématiciens en France et dans le monde ». In : *L'explosion des mathématiques*. Sous la dir. de M. Martin-Deschamps et P. Le Tallec. SMF & SMAI, 2002, p. 92-97.

[3] O. Bruneau et L. Rollet, éd. *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750-1870) : dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*. Nancy : PUN-Editions universitaires de Lorraine, 2017.

[4] K. Chatzis, T. Préveraud et N. Verdier. « Metz, ville d'édition mathématique ». In : *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750-1870) : dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*. Sous la dir. d'O. Bruneau et L. Rollet. Nancy : PUN–Editions universitaires de Lorraine, 2017, p. 135-159.

[5] K. Chatzis, T. Préveraud et N. Verdier. « Metz, ville scientifique et ville d'édition : le cas de Poncelet et de son réseau savant messin ». In : *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750-1870) : dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*. Sous la dir. d'O. Bruneau et L. Rollet. Nancy : PUN–Editions universitaires de Lorraine, 2017, p. 161-182.

[6] G. P. Curbera. *Mathematicians of the world, unite! the International Congress of Mathematicians: a human endeavor*. OCLC: ocn192045743. Wellesley, Mass : A K Peters, 2009. isbn : 978-1-56881-330-1.

[7] R. d'Enfert et F. Virginie. *L'offre locale d'enseignement scientifique et technique, 19e-20e siècle: approches disciplinaires»*. 2020.

[8] P. M. Delpu. « La prosopographie, une ressource pour l'histoire sociale ». *Hypothèses* **1**, no 18 (2015), p. 263-274.

[9] E. Duporcq. *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*. Gauthier-Villars, 1902.

[10] C. Ehrhardt. *Évariste Galois : la fabrication d'une icône mathématique*. En temps & lieux 29. Paris : Éditions de l'École des hautes études en sciences sociales, 2011. isbn : 978-2-7132-2317-4.

[11] H. Gispert. *La France mathématique : la Société Mathématique de France (1870-1914). Suivi de cinq études de R. Bkouche, C. Gilain, C. Houzel et al. Numéro spécial des Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*. Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques / Société mathématique de France, 1991.

[12] H. Gispert. *La France mathématique de la IIIe République avant la Grande Guerre*. Paris : Société mathématique de France, 2015.

[13] H. Gispert, éd. *Par la science, pour la patrie. L'Association française pour l'avancement des sciences (1872-1914) : un projet politique pour une société savante*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 2002.

[14] C.-A. Laisant. « Sur l'État d'avancement des travaux du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques ». *Bibliotheca Mathematica* **1** (1900), p. 246-249.

[15] C.-A. Laisant et A. Bühl. *Annuaire des mathématiciens 1901-1902*. Paris : C. Naud, 1902.

[16] L. Rollet. « Henri Poincaré et les « Autres ». Études biographiques et prosopographiques en histoire des sciences aux 19e – 20e siècles ». Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Orsay : Université Paris Sud 11, 2019.

[17] L. Rollet et P. Nabonnand, éd. *Les uns et les autres... Biographie et prosopographie en histoire des sciences*. Nancy : Presses Universitaires de Lorraine, 2012.

[18] L. Rollet et P. Nabonnand. « Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques ». *Gazette des mathématiciens* **92** (2002), p. 11-25.

[19] P. Varrin. « L'AFAS c'est aussi une base de données ». In : *Par la science, pour la patrie, l'Association Française pour l'Avancement des Sciences (1872-1914) : un projet politique pour une société savante*. Sous la dir. de H. Gispert. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 2002, p. 45-56.

[20] O. Wieviorka. *La France en chiffres de 1870 à nos jours*. Paris : Perrin, 2015.

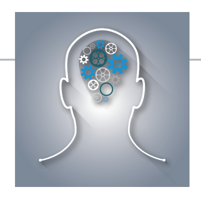


Laurent Rollet

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches sur les Sciences et les Technologies. UMR 7117, CNRS, université de Lorraine, université de Strasbourg. École nationale supérieure en génie des systèmes et de l'innovation.

laurent.rollet@univ-lorraine.fr

Ses travaux de recherche portent sur l'édition de la correspondance d'Henri Poincaré, ainsi que sur l'histoire des institutions scientifiques, des journaux et des communautés mathématiques au cours des XIXe et XXe siècle.



Une approche probabiliste de la théorie conforme des champs de Liouville

Dans cet article, nous présentons la théorie des champs de Liouville, qui fut introduite en physique dans les années 80 par Polyakov comme modèle de métriques aléatoires dans le cadre de la gravité quantique 2D, et donnons un aperçu de la construction probabiliste de cette théorie proposée par David-Kupiainen-Rhodes-Vargas dans [4] et qui s'appuie sur le chaos multiplicatif gaussien. Nous expliquons comment cette construction se relie à l'approche moderne des théories conformes des champs en physique appelée conformal bootstrap et basée sur la théorie des représentations.

• R. Rhodes
• V. Vargas

1. Introduction

La théorie des champs de Liouville est apparue en 1981 ; à l'époque une théorie prometteuse en physique, la théorie des cordes, était en pleine expansion et Polyakov [16] tomba sur la théorie de Liouville dans son approche de la théorie des cordes. Depuis la théorie de Liouville a été développée en physique comme un modèle pour la gravité quantique euclidienne $2d$ [1]. Rappelons que la gravité quantique est une tentative d'unifier la relativité générale et la théorie quantique des champs (une généralisation de la mécanique quantique). En théorie quantique standard façon Feynman, on somme sur tous les chemins possibles de la particule alors qu'en gravité quantique, on aimerait sommer sur toutes les métriques d'espace-temps possibles, car ce sont elles qui sont à la base de la relativité générale. C'est ce type de sommation qu'on va expliquer pour un cas plus simple que l'espace-temps réel qui est $4d$: les surfaces de Riemann $2d$. Nous allons survoler ci-après les idées qui ont façonné la théorie de Liouville, en partant de l'intégrale de chemin initialement proposée par Polyakov pour aller jusqu'à l'approche moderne du bootstrap conforme.

1.1 – La théorie classique et les liens avec l'uniformisation des surfaces

Pour introduire le sujet, il ne sera pas inutile de faire quelques rappels de géométrie. Considérons une surface de Riemann $\mathcal{M}$, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1 (i.e. de dimension réelle 2) avec des changements de cartes holomorphes $(\Phi_i)_i$. Pour rappel, ceci signifie que $\mathcal{M}$ peut être recouvert par des ouverts U_i tels que pour tout i l'application Φ_i est une bijection de U_i dans une boule ouverte $B_i \subset \mathbb{C}$ et pour tout i,j l'application $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ est holomorphe sur son domaine de définition. On peut équiper cette surface d'une métrique riemannienne g, i.e. on se donne en chaque point $x \in \mathcal{M}$ de la surface un produit scalaire noté $g(x) : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M}$ sur l'espace tangent $T_x\mathcal{M}$ de la variété en ce point x. On peut aussi voir $g(x)$ comme une matrice symétrique définie positive $(g_{ij}(x))_{i,j=1,2}$ d'inverse $(g^{ij}(x))_{i,j=1,2}$: dans ce cas on identifie $T_x\mathcal{M}$ avec $\mathbb{R}^2$ et pour $h,g \in \mathbb{R}^2$ on note $g(x)(h,g) = \langle g(x)h, g\rangle$ où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$. On notera également $\sqrt{g(x)(h,h)}$ parfois sous forme de norme $|h|_g$. Ici on travaille en dimension 2 mais de façon générale l'espace tangent s'identifie avec $\mathbb{R}^d$ où d est la dimension de la

1. Euclidien signifie que, dans ce modèle, la variable de temps sera vue comme une autre variable d'espace. Ceci se justifie en théorie quantique des champs par une méthode de continuation analytique appelée rotation de Wick mais que nous ne détaillerons pas ici.

variété [2]. À partir d'une métrique riemannienne, on peut déterminer plusieurs quantités géométriques telles que la distance d_g entre les points de la variété ou le volume v_g de certains sous-ensembles. Par exemple, la distance entre deux points x et y est donnée par

$$d_g(x,y) := \inf_{\sigma} \int_0^1 \sqrt{g(\sigma(t))(\dot{\sigma}(t),\dot{\sigma}(t))}\, dt$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins réguliers $\sigma : [0,1] \to \mathcal{M}$ tels que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$. De façon heuristique, cela revient à dire que pour δx petit on a

$$d_g(x, x+\delta x) \approx \sqrt{g(x)(\delta x, \delta x)}.$$

On peut aussi associer à cette métrique un laplacien qui prend la forme suivante en coordonnées locales pour une fonction $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ [3]

$$\Delta_g f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g^{ij}(x)\sqrt{\det g(x)}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big).$$

En coordonnées locales, la forme volume v_g est simplement $\sqrt{\det g(x)}dx$ où dx est la mesure de Lebesgue. Notons que pour les métriques scalaires i.e. de la forme $g(x) = e^{\varphi(x)}\mathrm{Id}$ où Id est la matrice identité on a $\Delta_g f(x) = e^{-\varphi(x)} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ et on retrouve en particulier le laplacien classique pour $\varphi = 0$. Une quantité essentielle associée à g est la notion de courbure scalaire (de Ricci [4]), à savoir une fonction $R_g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ qui décrit comment la surface se courbe localement. Nous ne donnerons pas la définition générale de la courbure ici bien qu'il existe une expression explicite en terme de coordonnées locales mais on se contentera de donner l'expression suivante lorsque $g(x) = e^{\varphi(x)}\mathrm{Id}$

$$R_g(x) = -e^{-\varphi(x)} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x).$$

Considérons par exemple la cas de la sphère munie de la métrique ronde. Par projection stéréographique, la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ est en bijection avec le plan complexe augmenté d'un point à l'infini $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Grâce à cette bijection, la sphère admet pour système de coordonnées le plan complexe $\mathbb{C}$ et la métrique ronde est scalaire de la forme $g_0(x)\mathrm{Id}$ où $g_0(x) = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}$. Dans ce cas, la forme volume est $v_{g_0}(dx) = g_0(x)dx$ où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et la courbure est constante $R_{g_0}(x) = -\frac{1}{g_0(x)} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \ln g_0}{\partial x_i^2}(x) = 2$.

De façon générale, une question qui a animé le début du siècle dernier, notamment au travers de Klein et Poincaré, est l'uniformisation des surfaces. Étant donnée la paire $(\mathcal{M}, g)$, cela consiste à trouver une autre métrique g' sur $\mathcal{M}$, conforme à g ou en d'autres termes de la forme $g'(x) = e^{\varphi(x)}g(x)$ pour une fonction lisse $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, qui soit de courbure constante, i.e. $R_{g'}(x) = R_{g'}(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{M}$. C'est une question importante pour la classification des surfaces de Riemann. Il y a eu plusieurs approches qui ont permis de résoudre cette question mais celle qui va nous intéresser ici fut développée par Poincaré. Elle est basée sur l'observation que deux métriques conformes telles que ci-dessus vérifient la relation de courbure

$$R_{g'}(x) = e^{-\varphi(x)}(R_g(x) - \Delta_g \varphi(x)).$$

L'inconnue à déterminer pour le problème d'uniformisation est la fonction φ : on veut trouver une telle fonction de sorte que le membre de gauche soit constant, disons égal à $-\mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Ceci revient donc à résoudre l'équation suivante, dite de Liouville,

$$\Delta_g \varphi - R_g = \mu e^{\varphi}.$$

Poincaré observa que l'on peut trouver de telles fonctions en déterminant les points critiques de la fonctionnelle

$$\varphi \mapsto \int_{\mathcal{M}} \Big(|\nabla_g \varphi(x)|_g^2 + 2R_g(x)\varphi(x) + 2\mu e^{\varphi(x)}\Big) \mathrm{v}_g(dx) \quad (1)$$

où ∇_g désigne la gradient dans la métrique g.

Finissons cette introduction à la géométrie riemanienne par mentionner que l'on peut transporter naturellement toutes les quantités associées à g via l'action d'un difféomorphisme $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$; on parle de métrique pullback via ψ et on la note $\psi^* g$. Nous ne donnerons pas la définition exacte de $\psi^* g$ mais signalons les propriétés suivantes : $d_{\psi^* g}(x,y) = d_g(\psi(x), \psi(y))$, $\Delta_{\psi^* g} f(x) = (\Delta_g f)(\psi(x))$ et $R_{\psi^* g}(x) = R_g(\psi(x))$. En particulier, les métriques $\psi^* g$ et g sont isométriques via ψ et il paraît naturel de les identifier (d'un point de vue physique, considérer la métrique pullback correspond à un changement de repère). Par la suite, on notera $\mathrm{Met}(\mathcal{M})$ l'ensemble des métriques et $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ l'ensemble des difféomorphismes.

2. Signalons que toutes les notions que l'on considère dans ce paragraphe admettent des généralisations lorsque $\mathcal{M}$ est une variété quelconque de dimension d.

3. Travailler en coordonnées locales revient à considérer $f \circ \Phi_i^{-1}$ mais par la suite on identifiera $f \circ \Phi_i^{-1}$ avec f.

4. Par définition, la courbure de Gauss est la moitié de la courbure de Ricci.

1.2 – L'intégrale de chemin de Polyakov

En toute généralité, la gravité quantique peut être vue comme une façon de sommer sur l'espace des métriques riemanniennes g sur une variété $\mathcal{M}$ de dimension d. Néanmoins, ces théories physiques devant être invariantes sous l'action des difféomorphismes (car la physique ne dépend pas du choix de référentiel) il est plus pertinent de sommer sur l'espace des métriques modulo l'action des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$, i.e. de construire une mesure sur l'espace $\mathsf{R}(\mathcal{M}) := \mathrm{Met}(\mathcal{M})/\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$. La gravité quantique vise donc à construire des mesures, éventuellement de probabilité, sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$, qui est une variété de dimension infinie. Si cette variété était finie-dimensionnelle, la procédure naturelle en géométrie différentielle (classique) serait de définir une métrique sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ et ensuite de considérer la forme volume attachée à cette métrique pour obtenir une mesure sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$. La métrique naturelle sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ est une métrique de type L^2, aussi appelée métrique de DeWitt et qui est définie heuristiquement de la façon suivante : si g et $g+\delta g$ sont deux métriques proches alors la distance (au carré) entre les deux est approximativement

$$d(g,g+\delta g)^2 \approx \int_{\mathcal{M}} \mathrm{tr}(g^{-1}(x)\delta g(x) g^{-1}(x)\delta g(x)) v_g(dx) \quad (2)$$

où $\mathrm{tr}(\cdot)$ désigne la trace (rappelons que $g(x)$ et $\delta g(x)$ sont des matrices symétriques). Notons que la présence de g^{-1} dans le terme de trace assure que la quantité (2) est intrinsèque, i.e. ne dépend pas du système de coordonnées. Il n'est pas compliqué de définir une notion rigoureuse de distance sur les métriques à partir de (2) en prenant un infimum sur des chemins (comme dans le cas fini-dimensionnel). Dans ce contexte, il est assez naturel de se demander s'il existe une forme volume $\mathcal{D}g$ sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ associé à la distance (2). La gravité quantique est basée sur cette mesure hypothétique $\mathcal{D}g$ et prend la forme suivante [5]

$$F \mapsto \int_{\mathsf{R}(\mathcal{M})} F(g) e^{-S_{\mathrm{EH}}(g)} \mathcal{D}g \quad (3)$$

où F est une fonction test arbitraire sur $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ et S_{EH} est la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert [6]. Signalons ici que la discussion précédente fait sens pour une variété $\mathcal{M}$ générale et que l'un des graals de la physique moderne est la construction de $\mathcal{D}g$ pour une variété de dimension 4 (la dimension physique de l'espace-temps). À partir de maintenant, nous allons supposer que $\mathcal{M}$ est une surface de Riemann. Il y a deux problèmes majeurs dans cette approche. Le premier concerne le fait que l'espace $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ est infini-dimensionnel et qu'il n'existe donc pas de méthode mathématique pour définir la forme volume $\mathcal{D}g$ associée à la métrique de DeWitt. On pourrait néanmoins le contourner à l'aide d'approximations finies-dimensionnelles comme la discrétisation sur réseau qui a donné naissance à la théorie des cartes planaires aléatoires et qui sera discutée par la suite. Le deuxième, plus problématique, est lié au fait que définir la mesure $\mathcal{D}g$ cache de sérieuses non linéarités provenant du fait que, même dans le cas fini-dimensionnel, définir des formes volume implique de calculer des déterminants relativement compliqués.

L'idée révolutionnaire de Polyakov dans son papier fondateur [16] fut de postuler que l'on peut se débarrasser des non linéarités et donner un sens à la mesure (3) directement dans le continu lorsque $\mathcal{M}$ est une surface de Riemann. L'argument clé, que nous expliquons brièvement sur la sphère de Riemann (identifiée avec le plan complexe $\mathbb{C}$ par projection stéréographique), fut d'effectuer un changement de variables dans la mesure (3) en décomposant chaque métrique g sous la forme [7]

$$g = \psi^*(e^{\sigma} g_0), \quad (4)$$

où ψ est un difféomorphisme (ψ^* son pullback), $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction appelée facteur log-conforme et pour rappel g_0 est la métrique ronde sur la sphère. Grosso modo, la décomposition (4) induit une factorisation de la mesure de la forme $\mathcal{D}g = \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma$ où $\mathcal{D}\psi$ est une mesure sur les difféomorphismes qui disparaît car l'on travaille dans l'espace des métriques modulo les difféomorphismes et $\mathcal{D}\sigma$ est la mesure d'une théorie conforme des champs (CFT par la suite pour Conformal Field Theory) appelée *théorie des champs de Liouville* [8]. Il réduit ainsi le problème à celui d'intégrer sur le

5. Pour simplifier la discussion, nous n'aborderons pas ici la question de coupler la gravité quantique à des champs de matière.
6. Sa définition exacte n'est pas importante pour notre discussion mais on peut dire sommairement qu'elle implique des quantités géométriques liées à la métrique g telles que son volume ou bien sa courbure moyenne.
7. Cette décomposition est spécifique à la dimension 2.
8. On verra par la suite ce qu'est une CFT mais grosso modo il s'agit d'une collection de champs aléatoires définis sur $\mathbb{C}$ et qui se comportent comme des tenseurs, i.e. exhibent certaines invariances lorsqu'on leur applique des transformations conformes. Dans le cas de la théorie de Liouville, ce sont les exponentiels de σ qui se comportent comme des tenseurs : cf la relation (27) ci-dessous pour un énoncé précis.

facteur log-conforme σ. En effectuant le changement de variables et en calculant le Jacobien de cette transformation, Polyakov réécrit le facteur conforme sous la forme $\sigma = \gamma\varphi$ pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et en déduit que la mesure sur les métriques (3) s'écrit

$$\int_{\mathrm{R}(\mathcal{M})} F(g)e^{-S_{\mathrm{EH}}(g)}\mathscr{D}g = \langle F(e^{\gamma\varphi})\rangle_{\gamma,\mu}{}^{9} \qquad (5)$$

où l'intégrale sur les facteurs conformes $F \mapsto \langle F\rangle_{\gamma,\mu}$ est de la forme

$$\langle F\rangle_{\gamma,\mu} := \int_{\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{R}} F(\varphi)e^{-S_L(\varphi)}D\varphi, \qquad (6)$$

avec $D\varphi$ la forme volume formelle associée à la métrique L^2 sur l'espace des applications $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de carré intégrable [10] (par rapport à la forme volume de la métrique g_0), $Q > 0$ est un paramètre, F représente une fonction test arbitraire et S_L est la fonctionnelle, dite action de Liouville :

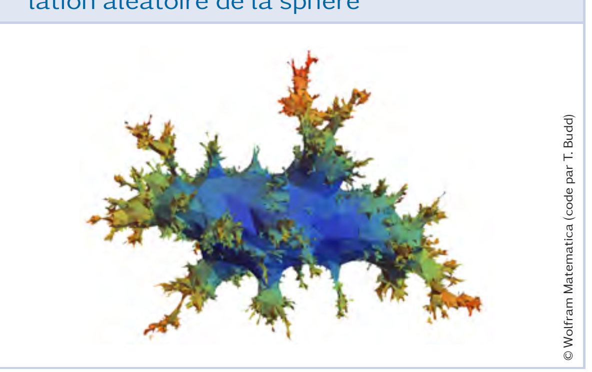
$$S_L(\varphi) := \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{C}}\left(|\nabla_{g_0}\varphi(x)|^2_{g_0} + QR_{g_0}\varphi(x) + 4\pi\mu e^{\gamma\varphi(x)}\right)\mathrm{v}_{g_0}(dx). \qquad (7)$$

Le paramètre principal est $\gamma \in (0,2)$ et l'autre paramètre $\mu > 0$ est de moindre importance car cette mesure possède une relation d'échelle par rapport à μ : deux mesures de la forme (6) avec des μ différents (et même γ) sont essentiellement les mêmes. La fonctionnelle (7) est la même que (1) à une subtilité près : le changement de variables $\varphi \to \gamma\varphi$ dans (1) produirait à un facteur multiplicatif global près la fonctionnelle (7) avec $Q = \frac{2}{\gamma}$. Or, pour la théorie conforme, la valeur de Q est fixée par la relation :

$$Q = \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}. \qquad (8)$$

Cette différence entre les valeurs classiques et quantiques provient d'effets de renormalisation que nous allons voir plus loin mais en gros cela signifie que le contrôle de certaines divergences cachées dans la définition exacte de la mesure (6) force à modifier la valeur de Q. Le fait que cette théorie conforme (i.e. la mesure (6)) soit basée sur la fonctionnelle de Liouville lui a donné son nom. Notons également que les points critiques de la fonctionnelle de Liouville (1) n'existent que pour des surfaces de genre supérieur ou égal à 2 ; pour les surfaces de genre 0 ou 1, il est nécessaire de considérer des singularités sur la surface, ce que nous discuterons plus loin. Dans cette optique, la théorie des champs de Liouville peut être vue comme la théorie probabiliste de l'uniformisation des surfaces de Riemann.

FIGURE 1 – Réalisation typique d'une triangulation aléatoire de la sphère



Toutes ces manipulations par Polyakov sont purement formelles car elles produisent des relations entre objets non rigoureusement définis. Néanmoins l'une des expressions obtenues par Polyakov ouvre une porte vers une compréhension plus profonde. En effet, le bénéfice du passage (formel) de (3) à (6) est que, bien que le problème soit toujours infini-dimensionnel, la forme volume $e^{-S_L(\varphi)}D\varphi$ s'interprète aisément, sans non linéarités cachées dans des calculs de déterminants. Malgré cette simplification drastique, l'existence de cette intégrale fonctionnelle n'a pas été totalement comprise en physique de sorte que cette question est restée en suspens. Mais cette expression formelle a permis de nombreux calculs qualitatifs et également de justifier certains axiomes d'une autre approche, plus algébrique, de la théorie des champs de Liouville appelée le bootstrap conforme et dont nous parlerons plus tard. Ce n'est que récemment qu'une définition mathématique de cet objet a été proposée par David-Kupiainen-Rhodes-Vargas [4, 9] et qui sera expliquée dans la section suivante.

1.3 – Géométries aléatoires discrètes

Les cartes planaires aléatoires ont été introduites pour discrétiser l'intégrale de chemin de Polyakov (3). Elles peuvent être vues comme une façon

9. Rigoureusement, la valeur de γ ici est $\gamma = \sqrt{\frac{8}{3}}$ mais en modifiant un peu la définition du terme de gauche de (5) on peut retrouver toutes les valeurs de $\gamma \in (0,2)$.

10. Dans la section 2, on verra comment interpréter cette mesure.

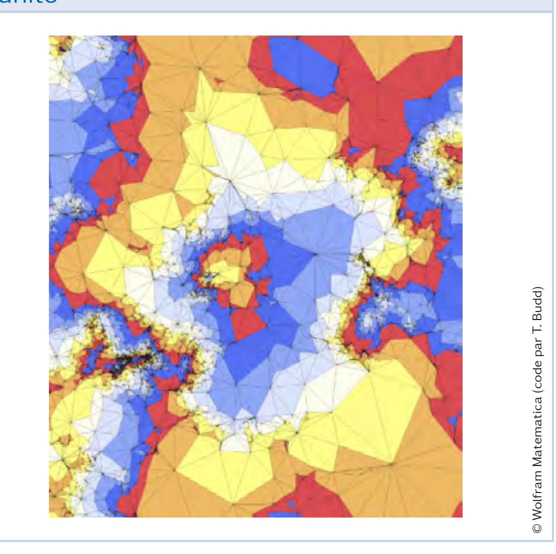
de choisir aléatoirement des géométries discrètes sur une surface de Riemann donnée. En premier lieu, on obtient une triangulation de la sphère en collant des triangles (au sens topologique) le long de leurs arêtes de sorte à obtenir une surface avec la topologie de la sphère (voir figure 1). Il n'y a qu'un nombre fini de triangulations possibles construites à partir d'un nombre fixé de triangles, modulo les homéomorphismes préservant l'orientation. On peut donc choisir uniformément au hasard une telle configuration en demandant à toutes les configurations d'être équiprobables.

Il faut ensuite plonger chaque triangulation sur la sphère d'une manière canonique, i.e. via les principes de la géométrie riemannienne et le théorème d' uniformisation des surfaces. Pour cela, il faut munir la triangulation d'un atlas holomorphe (comme pour les surfaces de Riemann). Cette construction est assez subtile mais, en quelques mots, disons que l'on voit chaque triangle comme un triangle équilatéral, toutes les arêtes des triangles étant de même longueur. L'intérieur d'un triangle s'envoie alors naturellement sur le même triangle du plan complexe, tout comme un ouvert située le long de deux arêtes adjacentes s'envoie sur le même ouvert du plan complexe. Le problème principal concerne les ouverts situés autour d'un sommet. Si 6 triangles équilatéraux se joignent en ce sommet alors on peut simplement envoyer cet ouvert sur le même ouvert du plan complexe par l'application $z \mapsto z$. S'il y a k triangles joignant ce sommet, on utilise plutôt l'application $z \mapsto z^{6/k}$. La triangulation est ainsi munie d'une structure conforme (système de cartes holomorphes) et peut donc être plongée dans la sphère via une application conforme par le théorème d'uniformisation. Celle-ci n'est pas unique car il reste des degrés de liberté correspondant aux biholomorphismes de la sphère, c'est-à-dire les transformations de Möbius ; si l'on identifie la sphère avec $\mathbb{C}$ alors les Möbius sont les applications de la forme $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc = 1$. On peut éliminer ce degré de liberté en marquant trois sommets sur la triangulation et en demandant à l'application conforme d'envoyer ces 3 sommets sur 3 points de la sphère choisis préalablement, par exemple 0, 1 et ∞.

En conclusion, nous avons une façon naturelle de choisir au hasard une triangulation à N faces et de plonger cette triangulation dans la sphère. On obtient alors une géométrie aléatoire sur la sphère en transportant la structure euclidienne classique de chacune des faces des triangles équilatéraux vers la sphère par l'application conforme. L'agencement des triangles ainsi que le plongement font que cette géométrie, dans la limite d'échelle où le nombre de triangles devient arbitrairement grand, est typiquement très peu ressemblante à la géométrie standard de la sphère, voire même aux géométries lisses : les physiciens [12] ont compris très tôt que cette limite d'échelle possède une structure multifractale très riche, comme illustrée sur la figure 2. Ce modèle est parfois appelé gravité quantique discrète.

Armés de simulations numériques et d'heuristiques, les physiciens se sont aperçus que cette limite d'échelle se comportait sensiblement comme l'intégrale de chemin de Polyakov pour la théorie de Liouville avec paramètre $\gamma = \sqrt{8/3}$, ce qui a donné ainsi beaucoup de poids aux manipulations formelles de Polyakov concernant le changement de variables dans l'intégrale (3). Cette question d'identifier la limite d'échelle de ces triangulations aléatoires et devenue une question d'importance en mathématiques, partiellement démontrée en utilisant des topologies de convergence plus faibles que celles implicitement utilisées ci-dessus (voir [6]).

FIGURE 2 – Zoom sur la structure locale des triangulations aléatoires plongées dans la sphère. Chaque triangle porte une masse unité



Mentionnons également qu'il est possible de choisir des mesures de probabilités sur les triangulations à N triangles autres que la distribution uniforme. Dans ce cas, il est pertinent de choisir une tri-

11. Pour faire simple, disons que cela représente un modèle de physique statistique avec des paramètres choisis à leur valeur

angulation selon le poids que lui donne la fonction de partition d'un champ de matière conforme[11], par exemple le modèle d'Ising critique ; cela aura pour effet d'obtenir à nouveau la théorie de Liouville pour la limite d'échelle de la géométrie des triangulations mais avec des valeurs possiblement différentes du paramètre γ ($\gamma = \sqrt{3}$ pour Ising, voir la revue [8] pour des explications très pédagogiques). Dans le cadre de triangulations couplées à des champs de matière conforme, il reste énormément de questions mathématiques à comprendre.

2. Construction probabiliste

Nous décrivons maintenant la construction de l'intégrale de chemin (6) proposée dans [4, 9] dans le cas de la sphère munie de la métrique ronde g_0. Sur les espaces de dimension finie, la mesure de Lebesgue sert usuellement de mesure de référence pour construire de nouvelles mesures en lui adjoignant des dérivées de Radon-Nykodym. En dimension infinie, il n'existe pas d'équivalent à la mesure de Lebesgue et les mesures de référence sont généralement gaussiennes. La construction probabiliste de [4] repose sur une telle mesure, appelée champ libre gaussien (GFF, pour Gaussian Free Field en anglais), associée au gradient carré dans (7)

$$\langle F\rangle_{\mathrm{GFF}} := \int_{\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{R}} F(\varphi) e^{-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{C}} |\nabla\varphi(x)|^2_{g_0} \mathrm{v}_{g_0}(dx)} D\varphi. \quad (9)$$

Nous allons essayer de comprendre « à la main » comment la mesure formelle (9) est construite rigoureusement via les probabilités. La définition formelle de la mesure $D\phi$ dans (9) correspond à la forme volume de la métrique L^2 sur les fonctions, ce qui peut s'énoncer plus simplement de la façon suivante : si l'on choisit une base orthonormée $(e_n)_n$ de $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{v}_{g_0})$ et que l'on décompose la variable d'intégration ϕ sur cette base

$$\phi = \sum_n \phi_n e_n \quad (10)$$

alors la mesure $D\phi$ s'interprète comme le produit des mesures de Lebesgue (à un facteur $\frac{1}{2\pi}$ près) sur chaque composante ϕ_n, i.e.

$$D\phi = \prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}.$$

Un choix pertinent d'une telle base est une famille orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions propres du laplacien $\triangle_{g_0}$ associé à ses valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ rangées en ordre croissant, avec $\lambda_0 = 0$ et e_0 la fonction constante égale à $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C})}}$ (dans le cas bien sûr de la métrique ronde g_0, on a $\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C}) = 4\pi$). Si l'on injecte dans (9) la décomposition (10) suivant cette base, on obtient la définition formelle

$$\langle F\rangle_{\mathrm{GFF}} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} F\Big(\sum_{n\geqslant 0}\phi_n e_n\Big) \exp\Big(-\frac{1}{4\pi}\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n|\phi_n|^2\Big)\prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}. \quad (11)$$

Ensuite, si l'on regroupe chaque terme $e^{-\frac{1}{4\pi}\lambda_n|\phi_n|^2}$ avec $\frac{d\phi_n}{2\pi}$ et que l'on fait le changement de variable $v_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}\phi_n}{\sqrt{2\pi}}$ pour $n \geqslant 1$ et $c = \frac{\phi_0}{\sqrt{\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C})}}$ on obtient l'expression heuristique suivante pour $\langle F\rangle_{\mathrm{GFF}}$

$$\langle F\rangle_{\mathrm{GFF}} = \frac{1}{2\pi}\Big(\det(-\triangle_{g_0})/\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C})\Big)^{-1/2} \times \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} F\Big(c + \sqrt{2\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{v_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\Big)\Bigg(\prod_{n\geqslant 1} e^{-\frac{1}{2}|v_n|^2}\frac{dv_n}{\sqrt{2\pi}}\Bigg) dc. \quad (12)$$

avec $\det(-\triangle_{g_0}) = \prod_n \lambda_n$. Ce produit diverge grossièrement par la loi de Weyl $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} dn$ pour $d > 0$ mais D. Ray & I. Singer ont donné un sens à ce déterminant par des méthodes de ζ-régularisation[12]. Une fois que l'on a défini proprement le terme $\det(-\triangle_{g_0})$, on voit que l'expression (12) admet une interprétation rigoureuse en terme de probabilités. Plus précisément, on voit donc que le coefficient constant c joue un rôle spécial et est distribué comme la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ alors que les variables v_n pour $n \geqslant 1$ se comportent comme des gaussiennes centrées indépendantes de variance 1 et forment un champ aléatoire bien connu des probabilistes appelé le GFF de moyenne nulle sur la sphère

$$X(x) := \sqrt{2\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n(x), \quad x \in \mathbb{C} \quad (13)$$

où les $(\alpha_n)_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes réelles indépendantes centrées et réduites sous la mesure de probabilité (avec espérance notée $\mathbb{E}$). Il est dit de moyenne nulle sur la sphère car $\int_{\mathbb{C}} X(x)\mathrm{v}_{g_0}(\mathrm{d}x) = 0$.

critique de telle sorte que le modèle acquiert des symétries conformes dans la limite d'échelle.

12. méthode consistant à donner un sens à ce déterminant par des arguments de prolongement analytique du même type que pour la fonction ζ de Riemann en théorie des nombres.

On obtient alors une définition probabiliste rigoureuse de l'intégrale (9)

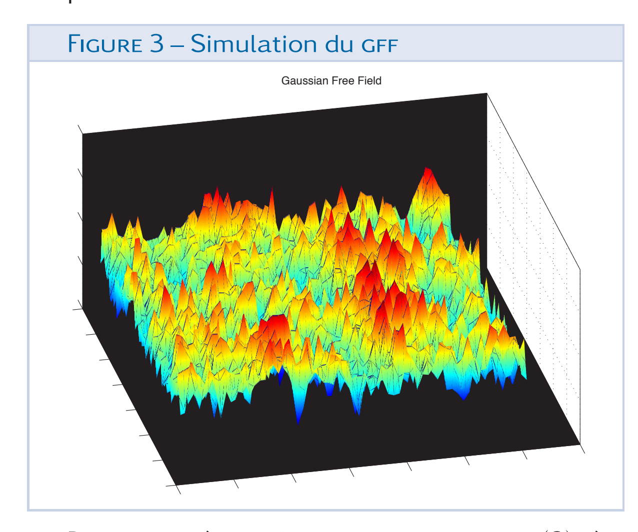
$$\langle F\rangle_{\mathrm{GFF}} := \frac{1}{2\pi}(\det(-\Delta)/\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C}))^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}[F(c+X)]\,dc. \quad (14)$$

Le champ X est gaussien et donc caractérisé par son espérance, qui est nulle $\mathbb{E}[X(x)] = 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}$, et par sa fonction de covariance $(x, y) \mapsto \mathbb{E}[X(x)X(y)]$ qui s'avère coïncider avec la fonction de Green G du Laplacien sur la sphère de Riemann avec condition de moyenne nulle sur la sphère $\int_{\mathbb{C}} G(x, y)\mathrm{v}_{g_0}(dx) = 0$.

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)] = 2\pi\sum_n \frac{e_n(x)e_n(y)}{\lambda_n} = 2\pi G(x, y),$$

où la dernière égalité correspond à la représentation de Mercer de la fonction de Green. Il est important de signaler à ce stade que la série (13) ne converge pas presque sûrement dans $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{v}_{g_0})$ mais plutôt dans un espace de distribution de Sobolev d'indice négatif. Bien que correspondant donc intuitivement à une fonction aléatoire, le GFF est donc trop irrégulier pour exister véritablement en tant que fonction et ne fait sens qu'en termes de distribution (au sens de Schwartz). C'est l'un des paradoxes qui apparaît souvent en théorie des champs : alors que la définition formelle (9) semble indiquer que la mesure vit dans l'espace des fonctions dont le gradient est de carré intégrable, la définition rigoureuse (14) fait intervenir une mesure qui vit dans l'espace des distributions !

Figure 3 – Simulation du GFF



Disposant d'une définition rigoureuse de (9), l'intégrale de chemin (6) s'interprète alors naturellement comme une mesure absolument continue par rapport à la mesure gaussienne, la dérivée de Radon-Nykodym étant donnée par le potentiel d'interaction exponentiel ainsi que le terme linéaire (impliquant la courbure scalaire dans (7))

$$\langle F\rangle_{\gamma,\mu} = \langle F e^{-\frac{Q}{4\pi}\int_{\mathbb{C}} R_{g_0}(x)\varphi(x)\mathrm{v}_{g_0}(dx)-\mu\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma\varphi(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)}\rangle_{\mathrm{GFF}}. \quad (15)$$

Le terme linéaire $\frac{Q}{4\pi}\int_{\mathbb{C}} R_{g_0}(x)\varphi(x)\mathrm{v}_{g_0}(dx)$ se comprend aisément sous la représentation (14) de la mesure gaussienne $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{GFF}}$: on remplace la variable φ par $c+X$, la contribution de la partie en X est nulle car la courbure R_{g_0} est constante (rappelons que g_0 est la métrique ronde donc $R_{g_0} = 2$) et le GFF X de moyenne nulle sur la sphère $\int_{\mathbb{C}} X(x)\mathrm{v}_{g_0}(dx) = 0$ et il ne reste donc plus que la contribution de la partie en c qui se calcule à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet $\int_{\mathbb{C}} R_{g_0}(x)\mathrm{v}_{g_0}(dx) = 8\pi$. Le terme de potentiel est plus délicat : en effet, le GFF X ne faisant sens qu'en termes de distribution son exponentiation n'est pas immédiate. Son irrégularité provient de la divergence logarithmique de la fonction de Green sur la diagonale $G(x, y) \sim \ln\frac{1}{|x-y|}$ pour x proche de y. Pour remédier à cela, il faut effectuer une procédure de renormalisation : on doit considérer une version régularisée X_ϵ de X (par exemple à l'aide d'une convolution avec une fonction lisse). Le paramètre ϵ représente l'échelle de régularisation et il signifie que la fonction de covariance du processus régularisé se comporte comme $\mathbb{E}[X_\epsilon(x)X_\epsilon(y)] \sim \ln\frac{1}{|x-y|+\epsilon}$ pour x proche de y. Ce lissage de la divergence a pour effet d'assurer que le processus régularisé est au moins continu et il fait alors sens de considérer son exponentielle $\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X_\epsilon(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)$. Ce terme diverge quand $\epsilon \to 0$ comme son espérance, c'est-à-dire de l'ordre de $\epsilon^{-\gamma^2/2}$ (en remarquant que $\mathbb{E}[e^{\gamma X_\epsilon(x)}] = e^{\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_\epsilon(x)^2]}$ et $\mathbb{E}[X_\epsilon(x)^2] \sim \ln\frac{1}{\epsilon}$) et Kahane a montré en 1985 qu'une renormalisation par cette espérance suffit à obtenir une limite non triviale pourvu que le paramètre γ soit dans l'intervalle $(0, 2)$. En d'autres termes, la limite suivante est non triviale pour toute fonction mesurable positive f

$$\int_{\mathbb{C}} f(x)\, e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx) := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{C}} f(x)\, e^{\gamma X_\epsilon(x)-\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_\epsilon(x)^2]}\mathrm{v}_{g_0}(dx). \quad (16)$$

Cette procédure de renormalisation est standard en physique et est appelée Wick ordering mais dans ce contexte du potentiel exponentiel, elle fut implémentée rigoureusement par Jean-Pierre Kahane

[11] (voir aussi [17]), qui a en particulier établi le critère optimal pour la convergence de (16). Sa théorie porte le nom de Chaos Multiplicatif Gaussien (GMC ci-après pour l'anglais Gaussian Multiplicative Chaos) et montre que la limite est en effet non triviale pour $\gamma \in (0,2)$ [13], justifiant ainsi l'existence de (15) pour $\mu > 0$ et $\gamma \in (0,2)$. En conclusion de toutes les considérations précédentes, on obtient comme définition rigoureuse de l'intégrale de chemin de la théorie de Liouville l'expression suivante

$$\langle F \rangle_{\gamma,\mu} := \frac{1}{2\pi}(\det(-\Delta_{g_0})/\mathrm{v}_{g_0}(\mathbb{C}))^{-1/2} \times \int_{\mathbb{R}} e^{-2Qc}\mathbb{E}\Big[F(c+X)e^{-\mu e^{\gamma c}\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)}\Big]dc \tag{17}$$

où $\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)$ est défini via la théorie du GMC.

On peut alors définir les fonctions de corrélation de la théorie de Liouville de façon similaire. Ce sont les observables que l'on souhaite calculer et qu'il faut voir comme les transformées de Laplace du champ φ sous la mesure (6). Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de vertex

$$V_\alpha(z) := e^{\alpha(\varphi(z)+\frac{Q}{2}\ln g_0(z))}. \tag{18}$$

Les fonctions de corrélation (à n points) sont obtenues en choisissant n points distincts du plan complexe $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ auxquels on associe des poids $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ et en intégrant le produit des opérateurs de vertex $V_{\alpha_i}(z_i)$ par rapport à l'intégrale fonctionnelle (17), c'est-à-dire

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)\dots V_{\alpha_n}(z_n)\rangle_{\gamma,\mu}. \tag{19}$$

Là encore, cette définition requiert une procédure de renormalisation car, le champ φ étant seulement une distribution, il ne peut être évalué en un point et justement le résultat principal de [4] fournit une représentation probabiliste rigoureuse et inattendue (même du point de vue de la physique) pour les fonctions de corrélations, après renormalisation

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)\dots V_{\alpha_n}(z_n)\rangle_{\gamma,\mu} := \gamma^{-1}\mu^{-s}\Gamma(s) \times e^{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 2Q)^2\chi + 2Q^2\chi}\prod_{i<j}\frac{1}{|z_i-z_j|^{\alpha_i\alpha_j}}\mathbb{E}\Big[Z^{-s}\Big] \tag{20}$$

où $s = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 2Q}{\gamma}$, $\chi = \ln 2 - \frac{1}{2}$ et Δ_α, qui est appelé le *poids conforme* de V_α, est défini via

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha}{2}(Q - \frac{\alpha}{2}). \tag{21}$$

Finalement, la variable aléatoire Z est construite de la façon suivante à partir du chaos multiplicatif gaussien

$$Z = e^{\frac{\gamma^2\chi}{2}}\int_{\mathbb{C}}(\prod_{i=1}^n \frac{1}{|x-z_i|^{\gamma\alpha_i}})g_0(x)^{-\frac{\gamma\sum_{i=1}^n \alpha_i}{4}}e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx). \tag{22}$$

Ainsi les corrélations de la théorie de Liouville sont, à un facteur explicite près, simplement un moment (fractionnaire) par rapport à une fonctionnelle du GFF (ou du GMC). Pour obtenir l'expression (20), il faut partir de la définition (17) et utiliser une transformation dite de Girsanov. À partir de l'expression (20), on peut déduire l'existence et la non trivialité de ces fonctions de corrélation, sous les conditions suivantes :

$$\forall i, \alpha_i < Q, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i > 2Q \tag{23}$$

ce qui implique en particulier que $n \geqslant 3$.

Pour mieux comprendre ces conditions, il peut être intéressant de rappeler le théorème suivant dû à Émile Picard [15], relatif à la recherche de métriques sur la sphère de Riemann avec courbure constante négative et avec singularités coniques. C'est une question qui fut posée en 1890 à Göttingen par la Royal Society of Science. Plus précisément, supposons que l'on veuille trouver une métrique conforme à g_0 sur le plan complexe $\mathbb{C}$, donc de la forme $g := e^{\gamma u(z)}g_0$ avec $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, présentant des singularités coniques en des points (distincts) $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ d'ordre respectifs $\chi_1,\dots,\chi_n$, i.e.

$$u(z) = \chi_i \ln\frac{1}{|z-z_i|} + O(1), \quad z \to z_i \tag{24}$$

et qui soit de courbure constante négative $-2\pi\mu\gamma^2$ sur $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$. En utilisant la relation sur les courbures pour des métriques conformes

$$R_g = e^{-\gamma u}(R_{g_0} - \gamma\Delta u),$$

et sachant que R_{g_0} est uniforme sur le plan complexe et vaut 2, on en déduit aisément que notre u doit vérifier

$$\Delta_z u(z) - \frac{2}{\gamma} = 2\pi\mu\gamma e^{\gamma u(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\} \tag{25}$$

tout en vérifiant (24) et en étant bornée au voisinage de ∞. Picard a montré que l'existence et l'uni-

13. Une transition de phase apparaît pour ce modèle à $\gamma = 2$, rappelant la transition de gel des systèmes désordonnés ou des verres de spins [7].

cité d'une telle métrique est équivalente aux conditions suivantes

$$\forall i, \chi_i < \frac{2}{\gamma}, \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_i > \frac{4}{\gamma}. \tag{26}$$

Le première condition de (26) assure que la singularité de la métrique en z_i, i.e. $e^{\gamma u(z)} g_0 \sim \frac{1}{|z-z_i|^{\gamma\chi_i}} g_0$ pour $z \to z_i$, est intégrable autour de z_i. Pour la seconde, le théorème de Gauss-Bonnet assure que cette métrique a courbure totale

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}} R_g \mathrm{v}_g(dx) = 8\pi - 2\pi \sum_i \gamma\chi_i.$$

Comme la courbure de cette métrique est contante et égale à $-2\pi\mu\gamma^2$, cette courbure totale vaut donc également $-2\pi\mu\gamma^2 \mathrm{v}_g(\mathbb{C})$, ce qui donne la relation

$$\mathrm{v}_g(\mathbb{C}) = \frac{1}{\mu\gamma^2}\Big(\sum_i \gamma\chi_i - 4\Big).$$

Comme ce volume doit être strictement positif, on en déduit la seconde condition de (26).

Il s'avère que les fonctions de corrélations de la théorie de Liouville sont des fluctuations aléatoires autour de ces métriques de Picard et la condition (23) peut donc se voir comme le pendant probabiliste des conditions classiques (26) [14]. La première condition dans (23) est une condition d'intégrabilité : plus précisément, au voisinage de z_i, l'intégrand dans (22) se comporte comme la singularité $\frac{1}{|x-z_i|^{\gamma\alpha_i}}$ et la condition $\alpha_i < Q$ assure que cette singularité est intégrable (avec probabilité un) par la mesure (aléatoire) $e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)$. Il n'est pas inutile de rappeler ici que la mesure $e^{\gamma X(x)}\mathrm{v}_{g_0}(dx)$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (pour cette dernière la condition d'intégrabilité serait plus stricte : $\alpha_i < \frac{2}{\gamma}$ comme dans le cas considéré par Picard) et possède une régularité locale différente de celle-ci au voisinage d'un point donné. La deuxième condition peut être vue comme une version probabiliste du théorème de Gauss-Bonnet.

À partir de la formule probabiliste (20), il est maintenant possible de vérifier que ces corrélations vérifient bien les axiomes d'une CFT. Nous n'allons pas écrire tous ces axiomes ici mais simplement en citer un qui est caractéristique, à savoir la covariance conforme globale de la théorie, prouvée dans [4], et qui s'énonce ainsi : si $z_1, \cdots, z_n$ sont des points distincts dans $\mathbb{C}$ et $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc = 1$) est une transformation de Möbius alors

$$\langle \prod_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}(\psi(z_i))\rangle_{\gamma,\mu} = \prod_{i=1}^{n} |\psi'(z_i)|^{-2\Delta_{\alpha_i}} \langle \prod_{k=1}^{n} V_{\alpha_i}(z_i)\rangle_{\gamma,\mu} \tag{27}$$

où Δ_α est le poids conforme de V_α défini via (21). La relation (27) est souvent notée

$$V_\alpha(\psi(z)) = |\psi'(z)|^{-2\Delta_\alpha} V_\alpha(z)$$

dans la littérature physique et exprime le fait que les $V_\alpha(z)$ sont des tenseurs aléatoires, ce qui en fait des objets très naturels à étudier. À partir de la relation (27), on voit que la fonction de corrélation à 3 points $\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3)\rangle_{\gamma,\mu}$, est entièrement déterminé par ce qui s'appelle les constantes de structure que nous noterons $\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}$ suivant la relation

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3)\rangle_{\gamma,\mu} = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2\Delta_{ij}} \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu} \tag{28}$$

où $\Delta_{12} = \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2}$, $\Delta_{13} = \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_3}$, $\Delta_{23} = \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3}$. Les constantes de structure s'obtiennent donc comme limite

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu} := \lim_{|z|\to\infty} |z|^{4\Delta_{\alpha_3}} \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(z)\rangle_{\gamma,\mu}. \tag{29}$$

et donc peuvent être vues comme les fonctions de corrélation aux points $0, 1, \infty$ (justifiant ainsi la notation $\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}$).

3. Construction via le bootstrap

Jusqu'aux travaux récents en probabilité [4] qui ont permis de construire les corrélations de la théorie de Liouville via le GMC, le statut de l'intégrale de chemin était assez controversé au sein de la communauté des physiciens qui doutaient pour la plupart de son existence ! À la place, les physiciens ont développé une autre approche de la théorie, basée sur la théorie des représentations (de l'algèbre de Virasoro) et appelée bootstrap conforme. Nous allons discuter brièvement cette approche

14. En fait, il est possible de donner un sens à l'expression (20) sous des conditions plus générales que (23) ; dans ce cas, on retrouve le pendant probabiliste des métriques avec courbure constante positive ou négative et des singularités coniques découvertes par Troyanov [20].

ici dans le cadre de la sphère de Riemann même si l'approche peut se généraliser à toutes les surfaces de Riemann modulo des modifications non triviales. L'approche du bootstrap conforme fut introduite dans les années 80 par Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ) dans un article révolutionnaire à l'époque [3] (cité 6056 fois selon Google Scholar !) ; le but de BPZ était de proposer des formules explicites pour les corrélations de la théorie de Liouville et pour ce faire BPZ proposèrent une méthode générale pour construire et calculer les corrélations des théories quantiques exhibant certains types de symétries conformes, à savoir les théories conformes des champs (CFT). L'approche de BPZ est basée sur l'idée que ces symétries conformes permettent la construction d'une représentation unitaire de l'algèbre de Virasoro sur un espace de Hilbert H construit à partir de ladite CFT. Concrètement cela signifie que l'on dispose d'un morphisme allant de l'algèbre des symétries de la CFT à valeurs dans une sous-algèbre des endomorphismes de H générée par une famille d'opérateurs, notée $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et appelée générateurs de Virasoro, telle que $L_n^* = L_{-n}$ et qui vérifie de plus les relations de commutation suivantes

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{\mathbf{c}}{12}(n^3-n)\delta_{-n,m}\mathrm{Id}.$$

Cette algèbre dépend donc d'un unique paramètre $\mathbf{c}$ appelé charge centrale. La démarche de BPZ repose alors sur deux points. Le premier repose sur une méthode récursive pour exprimer les fonctions de corrélations à n points en fonction des constantes de structure uniquement. Le deuxième consiste à calculer les fonctions de structure.

Brièvement, le premier point est basé sur l'observation que les dilatations forment un groupe de symétrie d'une CFT et se transfèrent, via la représentation, vers un (semi-)groupe d'opérateurs agissant sur l'espace de Hilbert H. Pour la plupart des CFT, le générateur de ce semigroupe est diagonalisable et permet d'obtenir une décomposition spectrale de l'espace de Hilbert. Selon les CFT, ce spectre peut être fini, discret ou continu. Dans le cas de la théorie de Liouville qui nous intéresse ici, il est continu et cette décomposition peut être vue comme l'analogue sur l'espace de Hilbert H à la formule de Plancherel pour la transformation de Fourier sur la droite réelle. De plus, les fonctions propres généralisées sont étroitement liées aux opérateurs de vertex (18) ; plus spécifiquement, on obtient les fonctions propres en appliquant les L_n pour $n \leqslant -1$ aux opérateurs de vertex pour $\alpha = Q + iP$ avec $P \in \mathbb{R}_+$. Grâce à cette décomposition, BPZ ont exprimé récursivement les corrélations à n points en somme sur les corrélations d'ordre inférieur en utilisant la formule de Plancherel. En itérant, les corrélations peuvent être calculées de façon récursive à partir des constantes de structure.

Pour le deuxième point, la stratégie consiste à observer que les relations de commutation de l'algèbre de Virasoro permettent d'identifier des EDPS satisfaites par certaines fonctions de corrélations ; en théorie, ces EDPS peuvent alors être résolues pour donner des expressions pour les constantes de structure en termes de fonctions spéciales provenant de la théorie des représentations. Mais en pratique, la tâche peut s'avérer ardue.

Via cette approche, BPZ purent construire les premières CFT, principalement celles dont le spectre est fini comme dans le cas des modèles minimaux, parmi lesquels le célèbre modèle d'Ising critique en 2d. Malheureusement, ils échouèrent à construire la théorie de Liouville dont le spectre est continu, ce qui fit dire à Polyakov : « CFT is an unsuccessful attempt to solve the Liouville model ». Ce qu'il manquait à BPZ c'était la détermination des constantes de structure, i.e. la condition initiale indispensable pour pouvoir appliquer leur formalisme récursif. Une construction de la théorie de Liouville en physique via le bootstrap conforme ne viendra que 10 ans plus tard avec l'identification de ces fameuses constantes de structure...

3.1 – Les magiciens DOZZ

Ce n'est que 10 ans après le papier BPZ que Dorn-Otto [5] et les frères Zamolodchikov [21] proposèrent une formule explicite assez incroyable, comme sortie du chapeau d'un magicien, pour les constantes de structure de la théorie de Liouville. Cette formule, appelée formule DOZZ en leur honneur, s'écrit

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}} = \frac{1}{2}\Big(\pi\,\mu\,\ell\Big(\frac{\gamma^2}{4}\Big)\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^{2-\frac{\gamma^2}{2}}\Big)^{\frac{2Q-\bar\alpha}{\gamma}} \tag{30}$$

$$\times \frac{\Upsilon'_{\frac{\gamma}{2}}(0)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\alpha_1)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\alpha_2)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\alpha_3)}{\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\frac{\bar\alpha}{2}-Q)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\frac{\bar\alpha}{2}-\alpha_1)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\frac{\bar\alpha}{2}-\alpha_2)\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(\frac{\bar\alpha}{2}-\alpha_3)} \tag{31}$$

où $\bar\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\ell(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)}$ avec Γ la fonction Gamma standard et $\Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(z)$ est une fonction spéciale

holomorphe introduite par les Zamolodchikov et définie comme le prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ de l'expression suivante pour $0 < \mathrm{Re}(z) < Q$

$$\ln \Upsilon_{\frac{\gamma}{2}}(z) = \int_0^\infty \left(\left(\frac{Q}{2} - z \right)^2 e^{-t} - \frac{(\sinh((\frac{Q}{2}-z)\frac{t}{2}))^2}{\sinh(\frac{t\gamma}{4})\sinh(\frac{t}{\gamma})} \right) \frac{dt}{t}. \quad (32)$$

Le moins que l'on puisse dire est que la formule (31) est loin d'être triviale et la façon dont DOZZ l'ont intuitée non plus. En quelques mots, DOZZ ont découvert cette formule à partir de manipulations formelles très ingénieuses sur l'intégrale de chemin (6) (rappelons ici que les physiciens doutaient de l'existence même de cette intégrale de chemin!) et d'arguments heuristiques de type prolongements analytiques. La méthode de DOZZ, bien que très astucieuse, n'en demeurait pas moins controversée ce qui inspira aux Zamolodchikov le commentaire suivant dans leur papier sur la formule DOZZ : « It should be stressed that the arguments of this section have nothing to do with a derivation. These are rather some motivations and we consider the expression proposed as a guess which we try to support in the subsequent sections. »

Dans ce contexte, il est bien entendu naturel de se demander si l'on peut retrouver la formule DOZZ à partir des constantes de structure de la construction probabiliste définis via (29). En utilisant l'expression (20), on peut même obtenir la formule explicite suivante pour les constantes de structure de la théorie probabiliste

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu} = \gamma^{-1}\mu^{-s}\Gamma(s)e^{-\frac{1}{2}(\bar{\alpha}-2Q)^2\chi+2Q^2\chi}\mathbb{E}(\rho(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-s}) \quad (33)$$

où pour rappel on note $\bar{\alpha} = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ et

$$\rho(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \int_{\mathbb{C}} \frac{g_0(x)^{-\frac{\gamma\bar{\alpha}}{4}}}{|x|^{\gamma\alpha_1}|x-1|^{\gamma\alpha_2}} e^{\gamma X(x)} \mathrm{v}_{g_0}(dx). \quad (34)$$

Ainsi, on voit que donner un sens probabiliste à la formule DOZZ revient à calculer le moment fractionnaire de la variable aléatoire $\rho(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ et en effet, on peut énoncer le théorème suivant démontré dans [13] :

Théorème 1. *L'expression* (33) *coincide, à une constante globale et explicite près (qui dépend de γ), avec la formule DOZZ* (31).

Nous ne commenterons pas la preuve de ce résultat car il nécessite d'introduire beaucoup de notions liées à la CFT.

3.2 – Ces bien mystérieux blocs conformes

La machinerie universelle du bootstrap conforme prend tout son sens pour les corrélations d'ordre supérieur ($n \geqslant 4$) et permet de construire ces corrélations d'ordre supérieures par récursion à partir des constantes de structure. Cela dépasserait de loin le cadre de cette présentation d'expliquer en détail ce formalisme très populaire en physique théorique mais dans le cas $n = 4$ il s'énonce ainsi dans le cadre de la théorie de Liouville [15]

$$\begin{aligned}\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}} &:= \int_0^\infty \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{Q-iP}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}} \\ &\times \langle V_{Q-iP}(0)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}} \\ &\times |z|^{2(\Delta_{Q+iP}-\Delta_{\alpha_1}-\Delta_{\alpha_2})}|\mathcal{F}_P(z)|^2 \mathrm{d}P \qquad (35)\end{aligned}$$

où $V_{Q-iP}(x)$ peut être vu comme le prolongement analytique en α de l'opérateur de vertex (18) et $\mathcal{F}_P(z)$ sont des fonctions holomorphes en z appelées *blocs conformes*. Ils dépendent en fait d'autres paramètres, i.e. la charge centrale de la CFT de Liouville $c_L = 1+6Q^2$ ou les poids conformes

$$\Delta_{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{2}(Q - \frac{\alpha_i}{2})$$

pour $i = 1,\dots,4$, mais pour ne pas alourdir les notations nous ne mentionnerons que la dépendance en P. On voit donc que les corrélations à 4 points se décomposent selon une combinaison linéaire (ou plus précisément une intégrale ici) de fonctions holomorphes au carré avec des coefficients dépendant des constantes de structure. Cette structure pour les corrélations à 4 points se retrouve dans toutes les CFT : les constantes de structure dépendent de la CFT mais les blocs sont universels car ils sont les mêmes pour toutes les CFT [16]. Les

15. Les corrélations à 4 points où l'on envoie un point à l'infini se construisent de façon analogue aux constantes de structure via un procédé limite, i.e.

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}} := \lim_{|u|\to\infty} |u|^{4\Delta_{\alpha_4}} \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(u)\rangle_{\gamma,\mu}^{\text{bootstrap}}.$$

16. À condition que l'algèbre de symétrie soit celle de Virasoro.

blocs conformes sont définis via une série entière en z

$$\mathcal{F}_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(P) z^n \qquad (36)$$

où les coefficients $\alpha_n(P)$ ont une expression compliquée obtenue par les relations de commutation de l'algèbre de Virasoro (et donc nous ne donnerons une définition précise dans ces notes), ce qui rend leur étude particulièrement ardue. En particulier, il est important de souligner ici que du point de vue mathématique, il n'existe aucune preuve directe de la convergence (36) pour $|z| < 1$, comme pourrait le laisser penser la formule (35) qui diverge quand $z \to 1$. Par là, on entend qu'il n'existe pas dans la littérature mathématique de bornes sur les $\alpha_n(P)$ de la forme $|\alpha_n(P)| \leqslant C\rho^n$ pour $C > 0$ et $\rho < 1$, et localement en P. Par ailleurs, l'expression (35) fait également intervenir une intégrale en P dont il faut vérifier l'intégrabilite au voisinage de l'infini. Jusqu'à récemment toute la méthodologie du bootstrap reposait en physique sur des simulations numériques qui semblaient confirmer l'existence de (35).

Récemment, des formules explicites pour $\mathcal{F}_P(z)$ furent proposés dans la littérature physique comme conséquence de la conjecture AGT [1] qui stipule que les blocs $\mathcal{F}_P(z)$ sont égaux à la fonction de partition de Nekrasov introduite dans le cadre de la théorie de Yang-Mills 4d avec supersymétrie. Une forme de cette conjecture à été prouvée récemment par Maulik-Okounkov [14] et Schiffman-Vasserot [18]; cependant, dans ces travaux, le bloc conforme (36) est vu comme une série formelle en z et le point crucial de la convergence en z de la série définissant $\mathcal{F}_P(z)$ n'est pas abordé et semble un problème difficile à attaquer via la théorie des représentations même avec la formulation des α_n fournie par la fonction de partition de Nekrasov.

La question naturelle qui vient alors est de savoir si l'approche via le bootstrap conforme coïncide avec la construction probabiliste proposée par [4]. En construisant des ponts entre les probabilités et la théorie des représentations, il a été montré récemment dans [10] que les corrélations à 4 points coïncident dans les deux approches :

Théorème 2. *Les corrélations à 4 points définies via* (20) *coïncident, à une constante globale et explicite près (qui dépend de γ), avec la formule du bootstrap* (35).

En corollaire du résultat, on obtient la convergence des blocs conformes pour $|z| < 1$ ainsi que la convergence de l'intégrale en P qui définit (35).

3.3 – Quelques perspectives

Étant donné que la construction probabiliste et celle du bootstrap se généralisent toutes deux aux surfaces de genre quelconque, la question se pose de savoir si ces deux approches coïncident dans ce cadre. Il s'agit là de construire des ponts avec une autre branche des mathématiques : la géométrie complexe. En mathématiques, ces ponts furent formalisées par Segal [19] dans le cadre d'une théorie générale mais les cas pratiques se firent rares, ce qui fit dire à Segal : « The manuscript that follows was written fifteen years ago... I just wanted to justify my proposed definition by checking that all know examples of CFTs did fit the definition. This task held me up... ». Ces idées furent ensuite étendues au concept de Topological Quantum Field Theory, voir [2].

En quelques mots, cela consiste à comprendre comment le recollement de surfaces de Riemann à bord le long de leurs bords respectifs s'interprète en termes de fonctions de corrélations pour les CFT sur ces surfaces. En décomposant alors chaque surface de Riemann fermée en surfaces de Riemann élémentaires (pantalons, anneaux et disques) et en interprétant les recollements de ces surfaces élémentaires en termes de blocs conformes, on peut exprimer toutes les fonctions de corrélation comme des formules de bootstrap du type (35), avec autant de facteurs DOZZ que de pantalons dans la décomposition de cette surface. Dans le cadre de la théorie de Liouville, il s'agit d'un travail en cours en collaboration avec C. Guillarmou et A. Kupiainen.

Références

[1] L. F. Alday, D. Gaiotto et Y. Tachikawa. « Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories ». *Lett. Math. Phys.* **91**, nº 2 (2010), p. 167-197. issn : 0377-9017. doi : 10.1007/s11005-010-0369-5.

[2] M. Atiyah. « Topological quantum field theories ». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, nº 68 (1988), 175-186 (1989). issn : 0073-8301. url : https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet-getitem?mr=1001453.

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov. « Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory ». *Nuclear Phys. B* **241**, nº 2 (1984), p. 333-380. issn : 0550-3213. doi : 10.1016/0550-3213(84)90052-X.

[4] F. David et al. « Liouville quantum gravity on the Riemann sphere ». *Comm. Math. Phys.* **342**, nº 3 (2016), p. 869-907. issn : 0010-3616. doi : 10.1007/s00220-016-2572-4.

[5] H. Dorn et H.-J. Otto. « Two- and three-point functions in Liouville theory ». *Nuclear Phys. B* **429**, nº 2 (1994), p. 375-388. issn : 0550-3213. doi : 10.1016/0550-3213(94)00352-1.

[6] B. Duplantier, J. Miller et S. Sheffield. « Liouville quantum gravity as a mating of trees ». *arXiv:1409.7055* (2014).

[7] Y. V. Fyodorov et J.-P. Bouchaud. « Freezing and extreme-value statistics in a random energy model with logarithmically correlated potential ». *J. Phys. A* **41**, nº 37 (2008), p. 372001, 12. issn : 1751-8113. doi : 10.1088/1751-8113/41/37/372001.

[8] C. Garban. « Quantum gravity and the KPZ formula [after Duplantier-Sheffield] ». In : 352. Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058. 2013, Exp. No. 1052, ix, 315-354. isbn : 978-2-85629-371-3.

[9] C. Guillarmou, R. Rhodes et V. Vargas. « Polyakov's formulation of $2d$ bosonic string theory ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **130** (2019), p. 111-185. issn : 0073-8301. doi : 10.1007/s10240-019-00109-6.

[10] C. Guillarmou et al. « Conformal bootstrap in Liouville Theory ». *arXiv:2005.11530* ().

[11] J.-P. Kahane. « Sur le chaos multiplicatif ». *Ann. Sci. Math. Québec* **9**, nº 2 (1985), p. 105-150. issn : 0707-9109.

[12] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov. « Fractal structure of 2D-quantum gravity ». *Modern Phys. Lett. A* **3**, nº 8 (1988), p. 819-826. issn : 0217-7323. doi : 10.1142/S0217732388000982.

[13] A. Kupiainen, R. Rhodes et V. Vargas. « Integrability of Liouville theory: proof of the DOZZ formula ». *Ann. of Math. (2)* **191**, nº 1 (2020), p. 81-166. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2020.191.1.2.

[14] D. Maulik et A. Okounkov. « Quantum groups and quantum cohomology ». *Astérisque*, nº 408 (2019), p. ix+209. issn : 0303-1179. doi : 10.24033/ast.

[15] E. Picard. « De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée ». *J. Reine Angew. Math.* **130** (1905), p. 243-258. issn : 0075-4102. doi : 10.1515/crll.1905.130.243. url : https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet-getitem?mr=1580684.

[16] A. M. Polyakov. « Quantum geometry of bosonic strings ». *Phys. Lett. B* **103**, nº 3 (1981), p. 207-210. issn : 0370-2693. doi : 10.1016/0370-2693(81)90743-7.

[17] R. Rhodes et V. Vargas. « Gaussian multiplicative chaos and applications: a review ». *Probab. Surv.* **11** (2014), p. 315-392. doi : 10.1214/13-PS218. url : https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet-getitem?mr=3274356.

[18] O. Schiffmann et E. Vasserot. « Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on A^2 ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **118** (2013), p. 213-342. issn : 0073-8301. doi : 10.1007/s10240-013-0052-3.

[19] G. Segal. « The definition of conformal field theory ». In : *Topology, geometry and quantum field theory*. Vol. 308. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, p. 421-577. url : https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet-getitem?mr=2079383.

[20] M. Troyanov. « Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **324**, nº 2 (1991), p. 793-821. issn : 0002-9947. doi : 10.2307/2001742. url : https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet-getitem?mr=1005085.

[21] A. Zamolodchikov et A. Zamolodchikov. « Conformal bootstrap in Liouville field theory ». *Nuclear Phys. B* **477**, nº 2 (1996), p. 577-605. issn : 0550-3213. doi : 10.1016/0550-3213(96)00351-3.



Rémi Rhodes

Aix-Marseille Université (amu), Institut de Mathématiques (i2m). Institut Universitaire de France (iuf)
remi.rhodes@univ-amu.fr

Rémi Rhodes est Professeur à Aix-Marseille Université. Ses travaux portent sur les probabilités, le chaos multiplicatif, la théorie quantique des champs et les interactions entre ces trois domaines.



Vincent Vargas

Institut Galilée, université Paris 13
vargas@math.univ-paris13.fr

Vincent Vargas, professeur associé à l'université de Genève, spécialiste de la théorie des probabilités et de la théorie quantique des champs.

Les auteurs souhaitent remercier Hugo Vanneuville pour ses nombreux commentaires qui ont permis d'améliorer la lisibilité de ce document.

Homogénéisation stochastique : du qualitatif au quantitatif

• A. Gloria

L'interaction entre équations aux dérivées partielles (EDP) et probabilités est un champ de recherche très actif qui a connu des percées fondamentales ces quinze dernières années. Citons trois exemples.

Les EDPS (s pour stochastique) : équations avec forçage aléatoire. Il s'agit d'équations dont le terme source est un bruit aléatoire. La difficulté pour analyser ces équations vient du fait que la réalisation d'un bruit aléatoire est un objet très peu régulier (penser au mouvement erratique d'un marcheur aléatoire). À hasard fixé (on parle de réalisation), l'EDPS (qui n'est alors rien d'autre qu'une EDP déterministe) n'est pas forcément bien posée. La problématique est d'exploiter qu'une EDPS a plus de structure que l'ensemble de ses réalisations pour définir une notion de solution.

Les EDP avec conditions initiales aléatoires. Certaines EDP d'évolution peuvent conduire à des phénomènes d'explosion en temps fini pour des conditions initiales bien (ou mal) choisies (penser à l'EDO $u'(t) = u(t)^2$). Ce comportement est-il générique ? La question revient à munir l'espace des conditions initiales d'une structure d'espace de probabilité et à y définir une mesure de probabilité pour laquelle l'équation d'évolution est bien posée pour presque toute condition initiale.

Les EDP à coefficients aléatoires. Dans ce cas, le champ aléatoire entre dans la définition même de l'opérateur (voir (6) ci-dessous). Les questions ne sont pas de prime abord des questions d'existence ou de régularité, mais plutôt des questions de type ergodique : quelle est la statistique de la solution en fonction de la statistique des coefficients ? Ces questions font l'objet de cet article.

Dans ces trois exemples de nature très différente, la difficulté de l'analyse vient de la non-linéarité de l'interaction entre l'opérateur différentiel et le hasard (via la non-linéarité de l'opérateur dans les deux premiers cas, penser encore à $u'(t) = u(t)^2$).

1. EDP à coefficients aléatoires : motivation physique



À partir du milieu du XIXe siècle, les physiciens étudient l'effet d'impuretés dans les matériaux, tant en mécanique qu'en électromagnétisme. Des travaux de Clausius et de Mossotti, popularisés par Rayleigh et Maxwell, sont de ce type.

Considérons un matériau conducteur occupant un domaine borné D en dimension $d \geqslant 1$, constitué d'un matériau homogène de conductivité Id (au sens des matrices carrées symétriques de taille $d \times d$) et d'impuretés sphériques de conductivité βId (pour un $0 < \beta \leqslant 1$) avec une fraction volumique θ qu'on suppose petite : $0 < \theta \ll 1$. On note $a_\theta = ((1-\chi_\theta)+\beta\chi_\theta)\mathrm{Id}$ la matrice de conductivité du matériau, où χ_θ est la fonction indicatrice des impuretés. On considère alors le problème de conductivité statique

$$-\nabla \cdot a_\theta \nabla u_\theta = f \text{ dans } D,$$

où f est une source thermique donnée et où on fixe la température u_θ à zéro sur le bord ∂D. On rappelle que pour un champ de vecteurs $V : D \to \mathbb{R}^d$, la divergence est donnée par $\nabla\cdot V : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^d \partial_i V_i(x)$ et que pour un champ $v : D \to \mathbb{R}$, le gradient est défini par $\nabla v : D \to \mathbb{R}^d, x \mapsto (\partial_1 v, \dots, \partial_d v)^t(x)$. Cette équation s'obtient en combinant la loi de conservation scalaire $\nabla \cdot q_\theta = f$ (la divergence du flux q_θ compense le terme source f) et la loi de constitution $q_\theta := -a_\theta \nabla u_\theta$ (le flux de chaleur est l'opposé de la

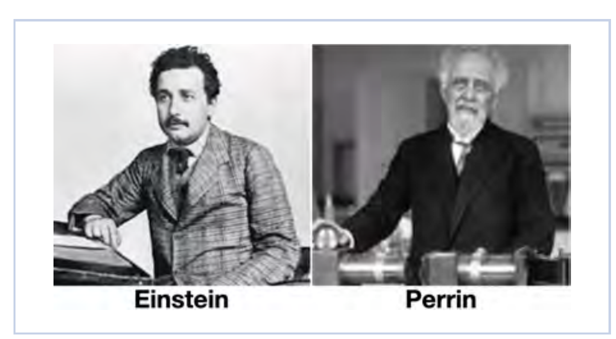
matrice de conductivité thermique a_θ appliquée au gradient de température ∇u_θ).

Si les impuretés sont petites par rapport aux variations spatiales du terme source f et bien réparties dans le matériau, Clausius et Mossotti prédisent que u_θ doit être bien approchée au sens ponctuel par la solution $\bar{u}_\theta$ de

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\nabla\cdot\bar{a}_\theta\nabla\bar{u}_\theta &=& f \text{ dans } D,\\ \bar{u}_\theta|_{\partial D} &=& 0,\\ \bar{a}_\theta &=& (1+\theta\frac{d(\beta-1)}{\beta+d-1})\mathrm{Id}, \end{array}\right. \quad (1)$$

où $\bar{a}_\theta$ est une conductivité constante dépendant seulement de β, de θ et de la dimension d de l'espace. C'est le premier exemple historique d'homogénéisation, qui consiste à remplacer une EDP à coefficients hétérogènes par une EDP à coefficients constants dans le régime où les variations spatiales des coefficients sont petites comparées aux variations spatiales du terme source. Ces coefficients constants constituent la conductivité *effective* ou *homogénéisée* du matériau. Une première observation frappante est que $\bar{a}_\theta$ n'est pas la moyenne $\fint_D a_\theta = \mathrm{Id}+\theta(\beta-1)\mathrm{Id}$ de a_θ : l'homogénéisation est un phénomène *non linéaire* (en effet a_θ multiplie u_θ). Une seconde observation est que $\bar{a}_\theta$ ne dépend pas de la distribution des défauts : ceci n'est cependant vrai qu'au premier ordre en θ.

Soixante-dix ans plus tard, Einstein revisite ce genre de calculs pour estimer la viscosité effective d'un fluide de Stokes qui contient des petites impuretés en suspension (dans son cas, des molécules de sucre). En combinant cette formule pour la viscosité effective à la formule reliant la constante de diffusion à la mobilité des impuretés (formule d'Einstein en théorie cinétique), Einstein fournit un moyen d'estimer le nombre d'Avogadro (à la base des expériences de Jean Perrin, fondateur du CNRS).



C'est au milieu du XXe siècle, avec l'essor de l'industrie et des matériaux composites, que l'homogénéisation devient un outil incontournable de modélisation, passant de la description à la prédiction. Elle permet de prédire le comportement mécanique ou physique de matériaux nouveaux dont la manufacture est rendue possible par les progrès techniques en sciences des matériaux. Cela va du sport (raquettes de tennis, perches) aux voitures (pneus) en passant par les avions (coques) et les capes d'invisibilité !

2. Théorie qualitative de l'homogénéisation stochastique

2.1 – Exemple de la dimension $d = 1$

Commençons par traiter l'exemple de la dimension $d = 1$ pour lequel on a des formules explicites. On considère une fonction (aléatoire) $a : \mathbb{R} \to \{1, \beta\}$, constante sur les intervalles $[k, k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et dont les valeurs sont tirées aléatoirement, indépendamment les unes des autres, selon une loi de Bernoulli de paramètre $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (β avec probabilité θ et 1 avec probabilité $1-\theta$). Pour modéliser qu'il y a une différence d'échelle entre le terme source et les variations de a, on remet a à l'échelle $0 < \varepsilon \ll 1$ (un petit paramètre). Dans ce cas, l'équation du problème de conductivité statique sur $[0,1]$ prend la forme pour $x \in (0,1)$

$$-(a(\tfrac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon'(x))' = f(x), \;\; u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \qquad (2)$$

où u_ε désigne la fonction inconnue et où f est la source. Dans le langage de Clausius, Mossotti, Maxwell et Rayleigh, ε représente la taille des impuretés, qui ne sont pas visibles à l'oeil nu (ou autrement dit, à l'échelle d'observation caractérisée par les variations de f, indépendantes de ε). D'un point de vue mathématique, cela revient à vouloir prendre la limite $\varepsilon \downarrow 0$ de u_ε et à voir si une telle limite satisfait à une « équation effective ».

Soit F la primitive de f d'intégrale nulle. La solution u_ε de (2) est explicite et donnée par

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}F(y)dy$$
$$-\int_0^x \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}dy\Big(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}dy\Big)^{-1}\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}F(y)dy. \qquad (3)$$

Cette expression fait apparaître une brique élémentaire : des intégrales pondérées de la conductivité inverse $\frac{1}{a}$. On rappelle que $\frac{1}{a}$ est constante par morceaux et que sa valeur suit une loi de Bernoulli ($\frac{1}{\beta}$ avec probabilité θ et 1 avec probabilité $1-\theta$). Étudions un de ces termes. Supposons pour simplifier

que $\varepsilon = \frac{1}{N}$ pour $N \in \mathbb{N}$. Par un changement de variables, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy = \frac{1}{N} \int_0^N \tfrac{1}{a}(t) dt,$$

ce qui correspond à faire la moyenne de N réalisations indépendantes d'une variable distribuée selon une loi de Bernoulli. Par la loi des grands nombres, cela implique que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy = \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{a}\right] = \theta \frac{1}{\beta} + 1 - \theta,$$

où on a noté $\mathbb{E}$ l'espérance. En approchant F par des fonctions en escaliers, on peut faire le même raisonnement dans chaque brique élémentaire de la solution (3) et ainsi obtenir pour tout $x \in [0,1]$ presque sûrement

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(x) = \bar{u}(x)$$
$$:= \int_0^x \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{a}\right] F(y) dy - x \int_0^1 \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{a}\right] F(y) dy. \quad (4)$$

En posant $\bar{a} := \mathbb{E}\left[\frac{1}{a}\right]^{-1}$, cette fonction $\bar{u}$ se trouve être solution de l'EDO pour $x \in (0,1)$

$$-\bar{a}\bar{u}''(x) = f(x), \ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0. \quad (5)$$

Comparons maintenant $\bar{a}$ à la formule (1). Dans le régime dilué $0 < \theta \ll 1$, un développement limité de $\bar{a}$ en θ donne

$$\bar{a} = (1 + \theta(\frac{1}{\beta} - 1))^{-1} = \bar{a}_\theta + O(\theta^2).$$

L'approximation de Clausius-Mossotti est donc bien valide. L'objet de la section suivante est d'étendre le résultat d'homogénéisation (remplacer (2) par (5)) à la dimension supérieure. La difficulté est bien sûr qu'on n'a plus de formules explicites (ni pour u_ε ni pour $\bar{a}$).

2.2 – Conductivité en dimension $d \geqslant 1$

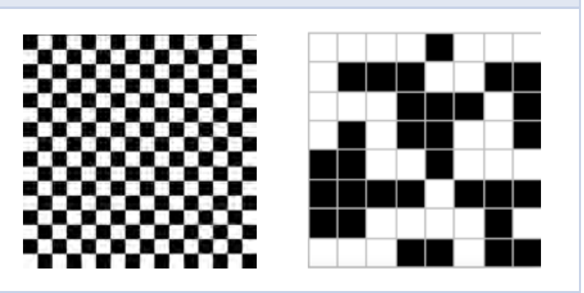
On pose $Q := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ et on définit un champ $a^\# : \mathbb{R}^d \to \{\mathrm{Id}, \beta\,\mathrm{Id}\}$ périodique et un champ : $\mathbb{R}^d \to \{\mathrm{Id}, \beta\,\mathrm{Id}\}$ aléatoire de la manière suivante :

- pour $z \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^d$, on pose $a^\#|_{z+\frac{1}{2}Q} = \mathrm{Id}$ si $\sum_{i=1}^d z_i \in \mathbb{Z}$ et $a^\#|_{z+\frac{1}{2}Q} = \beta\,\mathrm{Id}$ sinon ;
- pour $z \in \mathbb{Z}^d$, on pose $|_{z+Q} = \omega(z)\mathrm{Id}$, où $\omega(z)$ suit une loi de Bernoulli b qui vaut β ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ ($\omega(z)$ et $\omega(z')$ sont indépendants pour $z' \neq z$).

Notons au passage que $\omega \in \Omega = \{1, \beta\}^{\mathbb{Z}^d}$, l'ensemble des événements, muni de la mesure produit $b^{\otimes \mathbb{Z}^d}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on remet $a^\#$ et à l'échelle via $a^\#_\varepsilon(x) := a^\#(\frac{x}{\varepsilon})$ et $_\varepsilon(x) := (\frac{x}{\varepsilon})$. En assignant la couleur blanche à 1 et la couleur noire à β, $_\varepsilon$ représente un damier aléatoire : chaque case est de longueur ε et sa couleur est tirée à pile ou face indépendamment des autres cases. De même, $a^\#_\varepsilon$ représente un damier ε-périodique (chaque case est de longueur $\frac{\varepsilon}{2}$) – voir figure 1. Dans la suite, a_ε désignera $a^\#_\varepsilon$ ou $_\varepsilon$ selon le contexte.

Figure 1 – Damier périodique et aléatoire



Soit F un champ de vecteurs régulier à support compact et $f := \nabla \cdot F$ (ce choix, qui n'est pas nécessaire, sera pratique pour la suite). Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'équation posée sur tout l'espace $\mathbb{R}^d$ (sans condition de bord)

$$-\nabla \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f. \quad (6)$$

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution u_ε (dans un bon espace) qui satisfait pour toute fonction-test $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot F. \quad (7)$$

Pour $a_\varepsilon = {}_\varepsilon$, cette fonction u_ε est en fait un champ aléatoire $u_\varepsilon : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui dépend à la fois de la réalisation $\omega \in \Omega$ (via les coefficients) et de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$.

2.3 – Simulations numériques

Commençons par quelques simulations numériques des solutions u_ε du problème

$$-\nabla \cdot a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = 1 \text{ sur } Q, \ u_\varepsilon|_{\partial Q} = 0$$

(il est plus facile de simuler l'équation sur Q que sur $\mathbb{R}^d$). On a représenté sur la figure 2 (resp. 3) les

isovaleurs de u_ε pour les paramètres

$$\varepsilon = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$$

(de gauche à droite et de haut en bas) dans le cas $a_\varepsilon = a^\#_\varepsilon$ (resp. $a_\varepsilon = {}_\varepsilon$), puis représenté la limite $\bar{u}$ de u_ε (on verra plus loin comment !).

Figure 2 – Isovaleurs de u_ε, damier périodique

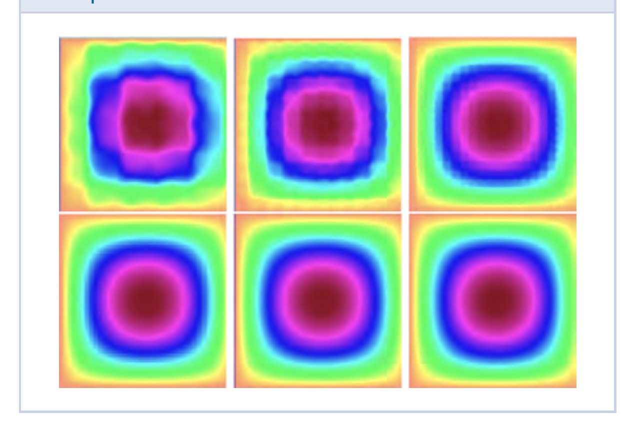
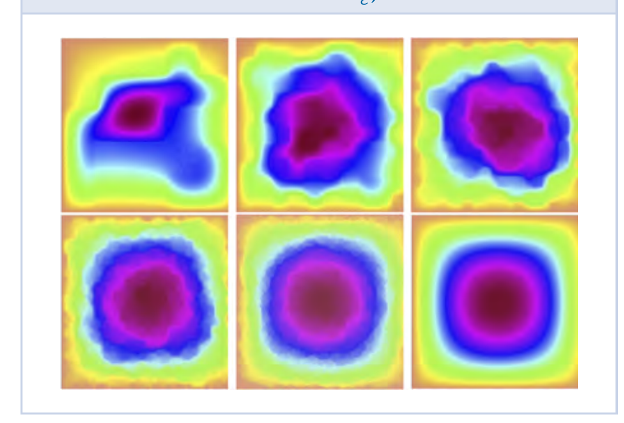


Figure 3 – Isovaleurs de u_ε, damier aléatoire



On remarque deux phénomènes :

- à la fois pour $a^\#$ et , la solution u_ε présente des oscillations à l'échelle ε, qui disparaissent à la limite $\varepsilon \downarrow 0$;

- dans le cas aléatoire, la solution u_ε présente aussi des fluctuations (si on faisait des tirages différents de $_\varepsilon$, on aurait des résultats différents), qui disparaissent à la limite $\varepsilon \downarrow 0$.

Comment décrire ces phénomènes et caractériser $\bar{u}$?

2.4 – Ansatz et analyse informelle

Comme les physiciens, postulons un Ansatz sur u_ε, c'est-à-dire un profil asymptotique de la solution sous une forme simple avec des paramètres à identifier (ici les paramètres sont des fonctions). On choisit le profil

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) := \bar{u}(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

pour décrire u_ε, où $\bar{u}$ est une fonction ne dépendant pas de ε (ce n'est pas crucial) et où u_1 et u_2 sont des fonctions de deux variables sur lesquelles on impose des propriétés de structure faisant intervenir le coefficient a.

Dans le cas périodique, il est naturel d'imposer que u_1 et u_2 sont périodiques de même période que $a^\#$ (par rapport à leur seconde variable). Reformulons cette propriété de périodicité en changeant un peu de point de vue : considérons u_ε non plus seulement comme une fonction de x et de ε, mais aussi comme une fonction de a. Comme $a^\#$ et $y \mapsto u_i(x,y)$ sont périodiques, pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $i \in \{1,2\}$, on a

$$u_i(a(\cdot + z); x, \tfrac{x}{\varepsilon} - z) = u_i(a; x, \tfrac{x}{\varepsilon}). \tag{8}$$

Dans le cas aléatoire, on impose que u_1 et u_2 satisfont à la propriété (8) pour tous $z \in \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$ (mais cette fois sans référence à la périodicité). On dit alors que u_1 et u_2 sont *stationnaires* par rapport à leur deuxième variable. En particulier, les variations de $u_1(x,\cdot)$ et $u_2(x,\cdot)$ sont « translatées » si on « translate » le damier sous-jacent (qu'il soit périodique ou aléatoire).

Maintenant qu'on a choisi le profil asymptotique de u_ε, il reste à identifier les paramètres $\bar{u}$, u_1 et u_2 (si c'est possible). Pour cela, injectons l'Ansatz $\tilde{u}_\varepsilon$ dans l'équation (6), calculons $-\nabla \cdot a_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon$ et égalons le résultat à f. Par la règle de Leibniz pour toute fonction v

$$\nabla v(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \nabla_x v(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y v(x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

on obtient d'abord un terme divergent d'ordre ε^{-1}, dont le coefficient doit être nul, ce qui donne avec $y = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$\nabla_y \cdot a(y)\Big(\nabla_x \bar{u}(x) + \nabla_y u_1(x,y)\Big) = 0. \tag{9}$$

Par linéarité de cette équation posée en y, en appelant ϕ_i « la solution » de

$$-\nabla_y \cdot a(y)(e_i + \nabla_y \phi_i(y)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{10}$$

dans la direction e_i (base canonique de $\mathbb{R}^d$, $i \in \{1,\dots,d\}$), on déduit que pour tous x et y,

$$u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i \bar{u}(x) \phi_i(y). \tag{11}$$

L'équation (10), appelée **équation du correcteur**, est fondamentale en homogénéisation.

Attardons-nous un peu sur cette équation, qu'on réécrit sous la forme

$$-\nabla_y \cdot a(y)\nabla_y \phi_i(y) = \nabla_y \cdot a(y)e_i$$

sur $\mathbb{R}^d$. Commençons par le cas périodique : on peut remplacer $\mathbb{R}^d$ par la période Q et ainsi obtenir l'existence et l'unicité d'une solution périodique à moyenne nulle par le théorème de Lax-Milgram. Avant de passer au cas aléatoire, identifions trois propriétés essentielles de cette solution périodique (étendue à $\mathbb{R}^d$) : elle satisfait $\nabla\phi_i(x+z) = \nabla\phi_i(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{Z}^d$, $\int_Q \nabla\phi_i = 0$ et $\int_Q |\nabla\phi_i|^2 < \infty$. Dans le cas aléatoire, nous construirons un champ ϕ_i aux propriétés de même type : stationnarité de $\nabla\phi_i$ (plutôt que périodicité), i.e. $\nabla\phi_i(a(\cdot+z); x-z) = \nabla\phi_i(a; x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{Z}^d$, espérance de la moyenne nulle (plutôt que juste de moyenne nulle) et second moment fini, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\int_Q \nabla\phi_i\right] = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_Q |\nabla\phi_i|^2\right] < \infty.$$

Supposons qu'on ait construit les ϕ_i et passons au terme suivant dans l'asymptotique de $-\nabla \cdot a_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon$, qui est d'ordre 0 en ε et doit donc être égal au terme source f :

$$\begin{aligned} f(x) = &-\nabla_x \cdot a(y)\Big(\nabla_x \bar{u}(x) + \nabla_y u_1(x,y)\Big) \\ &- \nabla_y \cdot a(y)\Big(\nabla_x u_1(x,y) + \nabla_y u_2(x,y)\Big). \end{aligned} \quad (12)$$

Traitons les cas périodique et aléatoire conjointement. Injectons (11) dans (12), moyennons le résultat sur $y \in Q$ et prenons-en l'espérance (par rapport à a – dans le cas périodique, cette opération ne fait rien). Comme f ne dépend pas de y et est déterministe, on obtient

$$f(x) = -\nabla_x \cdot \bar{a}\nabla_x \bar{u}(x) - \mathbb{E}\left[⨍_Q Z(x,y)dy\right] \quad (13)$$

où

$$\bar{a} := \mathbb{E}\left[⨍_Q a(y)(\mathrm{Id} + \nabla_y \phi(y))dy\right], \quad (14)$$

$$Z(x,y) := \nabla_y \cdot a(y)\Big(\nabla_x u_1(x,y) + \nabla_y u_2(x,y)\Big)$$

et ϕ est le vecteur de taille d dont les entrées sont les ϕ_i. Par hypothèse, $y \mapsto Z(x,y)$ est stationnaire (ou périodique) pour tout x (vu comme paramètre). Tout comme le gradient d'une fonction périodique est à moyenne nulle, l'espérance de la moyenne du gradient d'une fonction stationnaire est nulle et on a

$$\mathbb{E}\left[⨍_Q Z(x,y)dy\right] = 0.$$

De (13) on déduit alors l'équation effective (dite **homogénéisée**) sur $\bar{u}$

$$-\nabla \cdot \bar{a}\nabla\bar{u} = f, \quad (15)$$

dans l'esprit de ce qu'on a obtenu en dimension $d = 1$ plus haut.

2.5 – Analyse rigoureuse de l'équation du correcteur

Revenons à l'équation du correcteur (10) dans le cas aléatoire. Alors que $\phi_i \in L^2(\Omega, H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$ en général, par stationnarité, on peut chercher $\nabla\phi_i$ dans $L^2(\Omega \times Q)^d$ plutôt que dans $L^2(\Omega, L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d$. On note $L^2_{\mathrm{pot}}(\Omega \times Q)$ l'espace des champs potentiels (décomposition de Helmholtz-Weyl), i.e. la fermeture dans $L^2(\Omega \times Q)^d$ de l'espace des gradients des champs stationnaires. Alors que tout champ de vecteurs périodique de carré intégrable à rotationnel et à moyenne nuls est le gradient d'une fonction périodique de carré intégrable, cette propriété n'est pas vraie dans le cas aléatoire, ce qui constitue une difficulté pour l'analyse. Il est intéressant de s'attarder sur cette différence. Reprenons l'exemple de la dimension $d = 1$ et traitons les cas aléatoire et périodique conjointement (il suffit d'enlever l'espérance dans ce dernier cas). L'équation (10) prend la forme

$$-(a(x)(\phi'(a;x) + 1))' = 0,$$

ce qui donne $\phi'(a;x) = \frac{C}{a(x)} - 1$ pour une constante d'intégration C, puis $\phi'(a;x) = \frac{\bar{a}}{a(x)} - 1$ en utilisant que $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \phi'\right] = 0$ et en rappelant que $\bar{a} = \mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{a}\right]^{-1}$ (on a remis explicitement la dépendance en a). La fonction ϕ' est bien stationnaire (respectivement périodique) :

$$\phi'(a(\cdot+z); x-z) = \frac{\bar{a}}{a(x-z+z)} - 1 = \phi'(a;x).$$

Cette fonction peut-elle admettre une primitive ϕ stationnaire (respectivement périodique) et vérifiant $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \phi^2\right] < \infty$? Si $a = a^\#$, la fonction

$$\phi : x \mapsto \int_0^x \left(\frac{\bar{a}}{a^\#(t)} - 1\right)dt$$

est bien périodique et de moyenne nulle. Si $a =$, on considère $\phi : x \mapsto \int_0^x (\frac{\bar{a}}{(t)} - 1)dt + X$, où X est une

constante d'intégration aléatoire. Par contradiction, supposons que ϕ soit stationnaire et satisfasse $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \phi^2\right] < \infty$. Cela donne d'une part directement $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ en développant le carré dans l'estimation et d'autre part que $z \mapsto \mathbb{E}\left[\int_z^{z+1} \phi^2\right]$ ne dépend pas de z. Soit $N \in \mathbb{N}$, en écrivant $\phi(N) - X = \sum_{i=1}^N b_i$ avec $b_i := \frac{\bar{a}}{|_{(i-1;i)}} - 1$ et en observant que les b_i sont tirés indépendamment à pile ou face et d'espérance nulle, on obtient en prenant le carré de l'espérance et en utilisant l'indépendance

$$\mathbb{E}\left[(\phi(N) - X)^2\right] = \sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{E}\left[b_i b_j\right] = N\mathbb{E}\left[b_1^2\right]. \qquad (16)$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\phi(N)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{N}\mathbb{E}\left[b_1^2\right]^{\frac{1}{2}} - \mathbb{E}\left[X^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

ce qui contredit le caractère borné de $z \mapsto \mathbb{E}\left[\int_z^{z+1} \phi^2\right]$. Ceci montre qu'on ne peut pas espérer trouver en général de solution stationnaire à (10) et qu'il vaut mieux se concentrer sur $\nabla\phi_i$ – notez que les trois propriétés que nous avons retenues sur la solution périodique au paragraphe précédent concernent toutes son gradient.

Par Lax-Milgram, on obtient bien l'existence et l'unicité du champ stationnaire $\nabla\phi_i$ dans $L^2_{\mathrm{pot}}(\Omega \times Q)$ qui résout (10) sous la forme : Pour tout $\Psi \in L^2_{\mathrm{pot}}(\Omega \times Q)$,

$$\mathbb{E}\left[\int_Q \Psi \cdot a(e_i + \nabla\phi_i)\right] = 0.$$

En particulier $\nabla\phi_i$ est bien un gradient en espace pour presque tout a. La fonction ϕ_i est définie de manière unique en fixant par exemple $\int_Q \phi_i = 0$. Contrairement à l'Ansatz, ϕ_i n'est pas construit de manière stationnaire. Cependant, la stationnarité de $\nabla\phi_i$ et la condition $\mathbb{E}\left[\int_Q \nabla\phi_i\right] = 0$ impliquent la sous-linéarité (presque sûre) à l'infini du correcteur

$$\lim_{R\uparrow\infty} \frac{1}{R^2} \fint_{Q_R} \phi_i^2 = 0, \qquad (17)$$

où $Q_R = [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2})^d$ (version moyennée de la propriété $\lim_{|y|\uparrow+\infty} \frac{\phi_i(y)}{|y|} = 0$). L'argument ci-dessus montre que pour le damier aléatoire en dimension $d = 1$ on a l'estimation plus précise

$$\mathbb{E}\left[\phi(x)^2\right]^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \sqrt{|x|}.$$

2.6 – Analyse rigoureuse du résultat d'homogénéisation

Passons à l'étude de (6), dans le cas du damier aléatoire. Fixons une réalisation de a. Par (7) pour le choix $v = u_\varepsilon$, on déduit l'estimation déterministe $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |F|^2$. Comme ∇u_ε est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$, elle converge faiblement (le long d'une extraction que nous ne notons pas) vers une fonction $\nabla\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$, au sens où pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\psi = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\bar{u} \cdot \nabla\psi,$$

ce que l'on note $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla\bar{u}$. De la même manière, $a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ qui converge donc faiblement vers un champ $\bar{q}$ (le long d'une seconde extraction). En passant à la limite dans (7) on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot \bar{q} = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot F$$

pour tout $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il est à noter que $\nabla\bar{u}$ et $\bar{q}$ sont a priori aléatoires. Il reste à montrer que $\bar{q} = \bar{a}\nabla\bar{u}$ (pour $\bar{a}$ donné par (14), d'où on conclura que $\bar{u}$ est unique et déterministe). Ceci n'est pas évident car le produit de deux suites qui convergent faiblement ne converge (généralement) pas vers le produit des limites faibles [1] – ici $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla\bar{u}$ et $a_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1+\beta}{2}\mathrm{Id}$ (par la loi forte des grands nombres : c'est la moyenne de tirages à pile ou face!) mais on ne s'attend pas à ce que $a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1+\beta}{2}\nabla\bar{u}$ car $\bar{a} \neq \frac{1+\beta}{2}\mathrm{Id}$ (comme on l'a vu en dimension $d = 1$). Pour comprendre la convergence de ce produit, on utilise les fonctions-tests oscillantes de Tartar et la compacité par compensation de Murat et Tartar [10]. Plus précisément, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on définit $\psi_\varepsilon := \psi + \varepsilon\sum_{i=1}^d \phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})\partial_i\psi$ (notez la similarité avec l'Ansatz et (11)) et on considère (7) avec $v = \psi_\varepsilon$. Cela donne (en utilisant la symétrie de a_ε et la convention de somme sur les indices répétés)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} &(\partial_i\psi) a_\varepsilon (e_i + \nabla\phi_i(\tfrac{\cdot}{\varepsilon})) \cdot \nabla u_\varepsilon \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon\phi_i(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla\partial_i\psi \cdot a(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon \\ = &-\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i\psi(e_i + \nabla\phi(\tfrac{\cdot}{\varepsilon})) \cdot F - \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon\phi_i(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla\partial_i\chi \cdot F.\end{aligned} \qquad (18)$$

1. En dimension $d = 1$, $v_n : x \mapsto \cos(nx)$ converge faiblement vers 0 sur $[0,1]$, mais v_n^2 converge faiblement vers $\frac{1}{2}$ sur $[0,1]$.

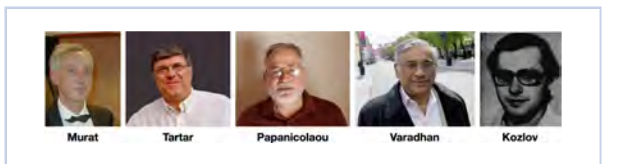
Avant de passer à la limite dans les différents termes, rappelons que

- Par la sous-linéarité des correcteurs à l'infini et un changement de variables, $\varepsilon\phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ converge faiblement vers zéro dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ presque sûrement.

- Par stationnarité de $y \mapsto a(y)(e_i + \nabla\phi_i)$ (resp. $e_i + \nabla\phi_i$) et par le théorème ergodique [2], $a_\varepsilon(e_i + \nabla\phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon}))$ (resp. $e_i + \nabla\phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})$) converge faiblement vers

$$\mathbb{E}\left[\fint_Q a(y)(e_i + \nabla\phi_i)\right] = \bar{a}e_i$$

(resp. $\mathbb{E}\left[\fint_Q e_i + \nabla\phi_i\right] = e_i$) presque sûrement dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. [3]



Combiné à la borne uniforme sur ∇u_ε dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$, ceci permet de passer à la limite dans les trois derniers termes de (18). Reste à passer à la limite dans le premier terme, qui met en jeu le produit des deux suites faiblement convergentes $a_\varepsilon(e_i + \nabla\phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon}))$ et ∇u_ε. Comme $a_\varepsilon(e_i + \nabla\phi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon}))$ est à divergence nulle (utiliser (10) et un changement de variables) et ∇u_ε est à rotationnel nul (en tant que champ de gradient), nous sommes dans le cadre de la compacité par compensation qui assure justement que le produit de telles suites converge (au sens des distributions) vers le produit des limites faibles [4]. À la limite (en utilisant la symétrie de $\bar{a}$, qui se lit mieux sur la formule $e_i \cdot \bar{a}e_j = \mathbb{E}\left[\fint_Q (e_i + \nabla\phi_i) \cdot a(e_j + \nabla\phi_j)\right]$), on obtient l'équation

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi \cdot \bar{a}\nabla\bar{u} = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi \cdot f,$$

qui est la formulation de (15) au sens des distributions. Cette équation est bien posée car la formule donnant $\bar{a}$ implique que $\bar{a}$ est symétrique définie positive. La limite est donc déterministe et unique, ce qui assure la convergence des suites ∇u_ε et $a_\varepsilon\nabla u_\varepsilon$ vers $\nabla\bar{u}$ et $\bar{a}\nabla\bar{u}$.

Les résultats ci-dessus ont été obtenus à la fin des années 1970 par Papanicolaou et Varadhan [9] et par Kozlov [8]. Ils sont valables pour des champs a stationnaires ergodiques généraux, non nécessairement symétriques. Ils impliquent que presque sûrement, pour tout terme source f, le gradient de l'unique solution u_ε de (6) converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ vers le gradient de l'unique solution $\bar{u}$ de (15), équation associée à une matrice de conductivité déterministe et constante.

On peut reformuler ce résultat en termes de convergence d'opérateurs. Rappelons d'abord que le projecteur de Helmholtz P est la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ des champs de vecteurs quelconques sur les champs de gradients. On peut l'exprimer via

$$P(F) = \nabla u_F, \text{ avec } \triangle u_F = \nabla \cdot F,$$

d'où la notation $P = \nabla(\triangle)^{-1}\nabla\cdot$. Avec ce formalisme, le résultat d'homogénéisation se réécrit comme suit.

Théorème 1. *Pour presque tout a, la suite de projecteurs de Helmholtz $\nabla(\nabla \cdot a_\varepsilon\nabla)^{-1}\nabla\cdot$ converge vers le projecteur de Helmholtz homogénéisé $\nabla(\nabla \cdot \bar{a}\nabla)^{-1}\nabla\cdot$ en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^d)^d \to L^2(\mathbb{R}^d)^d$ pour la topologie faible de $L^2(\mathbb{R}^d)^d$.*

D'une part, le développement de l'homogénéisation est intimement lié au développement de la compacité par compensation, outil fondamental en analyse des EDP. D'autre part, la convergence presque sûre de ∇u_ε vers $\nabla\bar{u}$ peut s'interpréter comme un théorème ergodique pour une EDP, il en constitue le premier exemple historique.

Réinterprétons ce résultat du point de vue de la physique. D'abord nous avons la loi de conservation $\nabla \cdot q = f$: la divergence du flux de chaleur q égale le terme source f. Ensuite, nous avons la loi de constitution $q = -a\nabla u$: le flux de chaleur est l'opposé de la conductivité thermique a appliquée au gradient de température ∇u (multiplication matrice vecteur), ce qui mène à l'équation $-\nabla \cdot a\nabla u = f$. L'homogénéisation consiste à changer d'échelles dans la loi de constitution et peut être représentée sous la forme du diagramme commutatif figure 4.

En particulier, on dit que a_ε H-converge (H comme homogénéisation) vers $\bar{a}$ ssi pour tout $F \in$

2. À voir typiquement comme une loi forte des grands nombres indexée par $\mathbb{Z}^d$ plutôt que $\mathbb{N}$.

3. Pour essentiellement la même raison que pour une fonction Q-périodique $\chi \in L^2(Q)$, la suite $\chi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ converge faiblement dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vers la moyenne $\int_Q \chi$.

4. Ce résultat se démontre très directement en Fourier à la manière de l'injection compacte de Rellich-Kondrachov : grâce aux contraintes algébriques générées par les hypothèses div-curl, les deux suites oscillent dans des directions orthogonales en Fourier et on peut donc passer à la limite faible.

Figure 4 – Diagramme commutatif

Champ	Loi de constitution	Flux	Loi de conservation
∇u_ε	$\xrightarrow{\text{multiplication par } -a_\varepsilon}$	$q_\varepsilon = -a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon$	$\nabla \cdot q_\varepsilon = f$
$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
$\nabla \bar{u}$	$\xrightarrow{\text{multiplication par } -\bar{a}}$	$\bar{q} = -\bar{a}\nabla \bar{u}$	$\nabla \cdot \bar{q} = f$

$L^2(\mathbb{R}^d)^d$,

$$\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla \bar{u} \text{ et } a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{a}\nabla \bar{u},$$

deux conditions qui se trouvent être équivalentes à $\Xi_\varepsilon(F) \rightharpoonup 0$, où le **commutateur d'homogénéisation** $\Xi_\varepsilon(F)$ (dont le rôle apparaîtra clairement au paragraphe suivant) est défini par

$$\Xi_\varepsilon(F) := a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \bar{a}\nabla u_\varepsilon. \tag{19}$$

On passe maintenant à des propriétés quantitatives : on souhaite comprendre comment l'opérateur $a \mapsto \nabla u_\varepsilon$ agit au niveau des lois de probabilités (quelles propriétés ergodiques de a sont transmises à ∇u_ε ?). Les résultats qui suivent sont plus récents et ont été principalement obtenus par deux groupes, cf. [7, 6, 5, 4] et [3, 2, 1] pour quelques références.

3. Théorie quantitative : oscillations et fluctuations

3.1 – Exemple de la dimension $d = 1$

Reprenons l'exemple du damier en dimension $d = 1$ et nos formules explicites (3) et (4). Commençons par les **oscillations**. Un calcul un peu long mais élémentaire montre en utilisant l'argument d'indépendance de (16) qu'on a la borne ponctuelle pour tout $x \in (0,1)$

$$\mathbb{E}\left[(u_\varepsilon(x) - \bar{u}(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|F\|_{L^2(0,1)}.$$

Cela correspond au premier terme de l'Ansatz. Pour voir l'effet de la première correction, concentrons-nous sur la dérivée de u_ε, qui s'écrit

$$u_\varepsilon'(x) = \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})}\Big(F(x) - \Big(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}dy\Big)^{-1}\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}F(y)dy\Big).$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})}$ oscille à l'échelle ε, u_ε' ne converge pas ponctuellement vers $\bar{u}'$ (l'utilisation de la compacité par compensation permettait justement de contourner cette difficulté : ∇u_ε converge seulement faiblement vers $\nabla \bar{u}$). En dérivant une fois l'Ansatz, on obtient que $x \mapsto \bar{u}'(x)(1 + \phi'(\frac{x}{\varepsilon}))$ devrait donner une meilleure description de u_ε' que $\bar{u}'$. Rappelons qu'ici

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \frac{\bar{a}}{a(y)} - 1, \\ \bar{u}'(x) &= \frac{1}{\bar{a}}F(x) - \int_0^1 \frac{1}{\bar{a}}F(y)dy, \end{aligned} \tag{20}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} u_\varepsilon'(x) - \bar{u}'(x)(1 + \phi'(\tfrac{x}{\varepsilon})) &= \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})}\int_0^1 F(y)dy \\ &\quad - \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})}\Big(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}dy\Big)^{-1}\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})}F(y)dy, \end{aligned}$$

d'où on conclut que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 (u_\varepsilon'(x) - \bar{u}'(x)(1 + \phi'(\tfrac{x}{\varepsilon})))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|F\|_{L^2(0,1)}$$

(par le même argument d'indépendance que dans (16)). Ceci explique au passage la terminologie **correcteur** : ϕ' permet de corriger $\bar{u}'$ pour le rendre proche de u_ε' en norme forte (ici norme $L^2(\Omega \times (0,1))$ en espace et probabilité) – on reconstruit a posteriori les oscillations de u_ε à partir de $\bar{u}$ (qui dépend du terme source f) et de ϕ (qui ne dépend lui que de a). Passons aux **fluctuations** et considérons des **observables** de u_ε' de la forme

$$J_\varepsilon := \int_0^1 u_\varepsilon'(x)G(x)dx$$

pour une fonction $G \in L^2(0,1)$. L'observable J_ε fluctue et on a presque sûrement

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} J_\varepsilon = \int_0^1 \bar{u}'(x)G(x)dx.$$

À quoi ressemblent les fluctuations de J_ε quand ε est petit ? Un calcul direct donne

$$J_\varepsilon = \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})} F(x)G(x)dx - \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})} \Big(\int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} dy \Big)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{a(\frac{y}{\varepsilon})} F(y)dy G(x)dx.$$

Le premier terme du membre de droite de J_ε (qui correspond en fait au gradient ϕ' du correcteur, voir (20)) se trouve être représentatif de l'expression complète. Par l'argument d'indépendance de (16), on a d'abord

$$\mathrm{Var}[J_\varepsilon]^{\frac{1}{2}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

le taux du théorème central limite en dimension $d = 1$. En appliquant ensuite le théorème central limite lui-même, on obtient plus précisément la convergence en loi

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(J_\varepsilon - \mathbb{E}[J_\varepsilon]) \overset{\text{en loi}}{\longrightarrow} \mathscr{G}(0, \sigma_{F,G}^2)$$

vers une loi normale centrée $\mathscr{G}(0, \sigma_{F,G}^2)$ de variance

$$\sigma_{F,G}^2 = \mathbb{E}\left[b_1^2\right] \int_0^1 F^2 G^2.$$

Pour étendre ce résultat à la dimension supérieure (ce qui fait l'objet du reste de ce texte), il convient de reformuler cette variance comme

$$\sigma_{F,G}^2 = \bar{a}^4 \mathbb{E}\left[b_1^2\right] \int_0^1 \bar{u}'^2 \bar{v}'^2, \tag{22}$$

où $\bar{v}$ est solution de $-\bar{a}\bar{v}'' = g$ sur $(0,1)$, $\bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0$ et $g = G'$.

3.2 – Contrôle des oscillations

Le théorème suivant montre que la variance des moyennes de $\nabla\phi$ décroît au taux du théorème central limite en toute dimension, étendant le résultat (21) établi en dimension $d = 1$ (prendre $G = R^{-d}\mathbb{1}_{Q_R}$ et $\varepsilon = R^{-1}$).

Théorème 2. *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant d$*, l'unique solution* $\nabla\phi_i \in L^2_{\mathrm{pot}}(\Omega \times Q)$ *de* (10) *satisfait, pour tous* $R \geqslant 1$ *et* $1 \leqslant j \leqslant d$*,*

$$\mathrm{Var}\left[\fint_{Q_R} \partial_j \phi_i(y) dy \right] \leqslant CR^{-d}.$$

En reliant une fonction aux intégrales (directionnelles) de son gradient, ceci (et un raffinement pour $d = 2$) implique des bornes non triviales sur ϕ_i pour $1 \leqslant i \leqslant d$:

Théorème 3. *Toute primitive* ϕ_i *du champ* $\nabla\phi_i$ *solution de* (10) *satisfait, pour tout* $z \in \mathbb{Z}^d$*, avec la notation* $Q(z) = [z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})^d$*,*

$$\mathbb{E}\left[\fint_{Q(z)} \phi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathbb{E}\left[\fint_{Q(0)} \phi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} + C \begin{cases} d = 1 & : \sqrt{|z|+2}, \\ d = 2 & : \ln^{\frac{1}{2}}(|z|+2), \\ d > 2 & : 1. \end{cases}$$

En particulier, ϕ_i *peut être choisie stationnaire en dimension* $d > 2$ *(ce qu'on n'aurait pas cru possible en se fiant à la dimension* $d = 1$*).*

Ce résultat quantifie la sous-linéarité (17) du correcteur à l'infini : pour tout $R \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{R^2} \fint_{Q_R} \phi_i^2 \right] \leqslant C \left\{ \begin{array}{lcl} d = 1 & : & R^{-1} \\ d = 2 & : & R^{-2}\ln R \\ d > 2 & : & R^{-2} \end{array} \right\} \overset{R\uparrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De là, on peut en déduire des taux de convergence sur le processus d'homogénéisation et comprendre les oscillations de la solution ∇u_ε. L'Ansatz $x \mapsto (\mathrm{Id} + \nabla\phi(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla\bar{u}(x)$ pour ∇u_ε est précis au sens suivant :

Théorème 4. *Pour tout* $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, les solutions* u_ε *et* $\bar{u}$ *de* (6) *et* (15) *satisfont*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\varepsilon(x) - (\mathrm{Id} + \nabla\phi(\tfrac{x}{\varepsilon}))\nabla\bar{u}(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C_F \begin{cases} d = 1 & : \sqrt{\varepsilon}, \\ d = 2 & : \varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, \\ d > 2 & : \varepsilon. \end{cases}$$

En particulier, on retrouve l'ordre de précision prédit par l'Ansatz (en le dérivant et traitant le terme u_2 comme une erreur) en dimensions $d > 2$ uniquement. Ce théorème est une conséquence directe du Théorème 3. En effet, on peut montrer que l'erreur $z_\varepsilon := u_\varepsilon - (\bar{u} + \varepsilon\nabla\bar{u} \cdot \phi(\frac{\cdot}{\varepsilon}))$ du développement à deux échelles satisfait l'équation

$$-\nabla \cdot a_\varepsilon \nabla z_\varepsilon = \varepsilon\nabla \cdot \Big(a_\varepsilon \phi(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}) - \sigma(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}) \Big) \nabla^2 \bar{u}, \tag{23}$$

où σ est le correcteur du flux (qui satisfait les mêmes bornes que ϕ, voir par exemple [8, 5]).

Comme le membre de droite est sous forme divergence, on peut tester l'équation (23) avec l'erreur z_ε et obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla z_\varepsilon|^2 \leqslant C\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} (|\phi(\tfrac{\cdot}{\varepsilon})|^2 + |\sigma(\tfrac{\cdot}{\varepsilon})|^2)|\nabla^2 \bar{u}|^2,$$

d'où on déduit le Théorème 4 en prenant l'espérance, en utilisant le Théorème 3 et la régularité de la solution $\bar{u}$ de (15) (équation à coefficients constants).

3.3 – Fluctuations

Tout comme nous l'avons fait pour les oscillations de ∇u_ε, commençons par étudier les fluctuations du correcteur. Il se trouve cependant qu'au niveau des fluctuations, à part en dimension $d = 1$, ce n'est pas le correcteur lui-même qui porte l'information, mais la quantité $\Xi := a(\mathrm{Id}+\nabla\phi) - \bar{a}(\mathrm{Id}+\nabla\phi)$, le **commutateur (standard) d'homogénéisation** (cf. (19) pour le commutateur de la solution). On a un résultat de type central limite (fonctionnel) :

Théorème 5. *La fonctionnelle aléatoire I_ε, définie via $I_\varepsilon(\psi) := \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Xi(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \psi(x)dx$ pour $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^{d\times d}$, converge en loi vers un champ Gaussien : la loi de $I_\varepsilon(\psi)$ converge vers une loi normale centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^d} \psi \cdot \mathscr{Q}\psi$, où $\mathscr{Q}$ est un tenseur à 4 indices*[5].

Avec le même type de notation que pour le projecteur de Helmholtz, on a l'identité

$$\mathrm{Id}+\nabla\phi = -\nabla(\nabla\cdot\bar{a}\nabla)^{-1}\nabla\cdot\Xi$$

(le premier terme du commutateur disparaît en utilisant (10)). Ainsi, $\nabla\phi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ converge (en tant que distribution aléatoire) vers la projection de Helmholtz (homogénéisée) d'un champ gaussien, c'est-à-dire un objet proche du champ libre gaussien.

On peut déduire les fluctuations du commutateur $\Xi_\varepsilon(F)$ (cf. (19)) à partir des fluctuations du commutateur standard Ξ grâce à un développement à deux échelles (d'une forme similaire à l'Ansatz) :

Théorème 6. *Pour tous $F, G \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ et tout $\varepsilon > 0$, le commutateur d'homogénéisation $\Xi_\varepsilon^c(F) := a_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - \bar{a}\nabla u_\varepsilon - \mathbb{E}[a_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - \bar{a}\nabla u_\varepsilon]$ de la solution u_ε de (6) (qu'on a centré par commodité) satisfait*

$$\mathbb{E}\left[\left(\varepsilon^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} G\cdot\left(\Xi_\varepsilon^c(F) - \Xi(\tfrac{x}{\varepsilon})\nabla\bar{u}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{F,G}\begin{cases} d=1 & : \sqrt{\varepsilon}, \\ d=2 & : \varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, \\ d>2 & : \varepsilon, \end{cases}$$

où $\bar{u}$ est la solution de (15) et Ξ est le commutateur d'homogénéisation standard. En particulier, les fluctuations de $\varepsilon^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} G\cdot\Xi_\varepsilon^c(F)$ (qui sont génériquement d'ordre 1) coïncident à l'ordre dominant avec les fluctuations du commutateur standard $\varepsilon^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Xi(\frac{\cdot}{\varepsilon}) : G\otimes\nabla\bar{u}$.

Ce résultat (appelé structure trajectorielle des fluctuations) montre qu'alors que les fluctuations du commutateur $\int_{\mathbb{R}^d} G\cdot\Xi_\varepsilon(F)$ et celles de son développement à deux échelles $\int_{\mathbb{R}^d} G\cdot\Xi(\frac{x}{\varepsilon})\nabla\bar{u}$ sont d'ordre $\varepsilon^{\frac{d}{2}}$, les fluctuations de leur différence sont d'ordre $\varepsilon^{\frac{d}{2}}o(1)$ (où le $o(1)$ est quantifié dans le Théorème 6). Ceci est d'autant plus surprenant que ce n'est pas le cas pour ∇u_ε et son développement à deux échelles $(\mathrm{Id}+\nabla\phi(\frac{\cdot}{\varepsilon}))\nabla\bar{u}$: leurs fluctuations sont différentes ! Comme pour $\nabla\phi$, on retrouve les fluctuations de ∇u_ε via l'identité $\nabla u_\varepsilon = \nabla(-\nabla\cdot\bar{a}\nabla)^{-1}\nabla\cdot\Xi_\varepsilon(F) + \nabla\bar{u}$ qu'on obtient en utilisant (6) et (15). Les fluctuations de $\varepsilon^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} G\cdot\nabla u_\varepsilon$ sont donc asymptotiquement gaussiennes de variance

$$\sigma_{F,G}^2 = \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\bar{u}\otimes\nabla\bar{v} : \mathscr{Q}\nabla\bar{u}\otimes\nabla\bar{v},$$

où $\bar{v}$ est solution de $-\nabla\cdot\bar{a}\nabla\bar{v} = \nabla\cdot G$, ce qui étend (22) à $d \geqslant 1$.

Les résultats ci-dessus permettent de caractériser les oscillations et les fluctuations de ∇u_ε à partir de la solution du problème homogénéisé et de développements à deux échelles (basés sur le correcteur et sur le commutateur d'homogénéisation). Ceci constitue une **réduction drastique de complexité** : il suffit en effet de connaître les oscillations et les fluctuations des seuls champs aléatoires $\nabla\phi$ et Ξ pour décrire à l'ordre dominant les oscillations et les fluctuations de l'opérateur de Helmholtz aléatoire $\nabla(\nabla\cdot a_\varepsilon\nabla)^{-1}\nabla\cdot$ à partir de l'opérateur de Helmholtz limite $\nabla(\nabla\cdot\bar{a}\nabla)^{-1}\nabla\cdot$. Dans le régime où $0 < \varepsilon \ll 1$ est assez petit, l'analyse décrit précisément les phénomènes en jeu figure 2.

5. de sorte que $\psi\cdot\mathscr{Q}\psi = \mathscr{Q}_{ijkl}\psi_{ij}\psi_{kl}$, avec somme de 1 à d sur les indices répétés.

4. Pour en savoir plus...

L'objectif de ce court paragraphe est de donner une idée générale de la preuve de ces résultats. Il est fondamental de considérer la fonction u_ε comme une fonction des coefficients a. Ce faisant, pour comprendre la dépendance de u_ε par rapport à a, on est tenté de voir comment u_ε réagit à des changements de a localisés en espace, ce qui revient à faire du calcul différentiel en probabilité et à dériver la solution de (6) par rapport aux coefficients de l'opérateur. Le calcul de Malliavin (ou ses variantes poissonienne ou de Glauber) est un outil tout à fait adapté pour cela (inégalités de Sobolev logarithmiques, formules d'Helffer-Sjöstrand pour représenter les covariances et le calcul de Stein-Malliavin pour montrer la gaussiannité asymptotique des fluctuations). Pour tirer partie de cette approche, il faut pouvoir contrôler les dérivées de u_ε par rapport à a. Ces « dérivées de Malliavin » de u_ε satisfont elles-mêmes une EDP avec les coefficients a_ε, pour laquelle on a besoin d'une théorie de la régularité qui est valable pour l'opérateur à coefficients constants $-\nabla\cdot\bar a\nabla$ mais pas pour l'opérateur à coefficients oscillants $-\nabla\cdot a_\varepsilon\nabla$. C'est la notion de régularité aux grandes échelles qui permet de conclure. Ceci formalise, dans ce contexte, l'idée générale que si une suite d'objets peu réguliers converge vers un objet régulier, cette suite doit acquérir cette régularité d'une façon ou d'une autre. Dans le cas présent, l'opérateur $\nabla(\nabla\cdot a_\varepsilon\nabla)^{-1}\nabla\cdot$ a bien des propriétés de régularité comparables à celles de $\nabla(\nabla\cdot\bar a\nabla)^{-1}\nabla\cdot$, mais seulement aux grandes échelles, cf. [3, 5]. Nous renvoyons à [7, 6, 5, 4] pour les détails et à [2, 1] pour des résultats similaires sous l'hypothèse que a a une longueur de dépendance finie (et donc sans calcul de Malliavin).

Références

[1] S. Armstrong, T. Kuusi et J.-C. Mourrat. *Quantitative stochastic homogenization and large-scale regularity*. **352**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Cham, 2019, p. xxxviii+518.

[2] S. Armstrong, T. Kuusi et J.-C. Mourrat. « The additive structure of elliptic homogenization ». *Invent. Math.* **208** (2017), p. 999-1154.

[3] S. N. Armstrong et C. K. Smart. « Quantitative stochastic homogenization of convex integral functionals ». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **49**, nº 2 (2016), p. 423-481.

[4] M. Duerinckx, A. Gloria et F. Otto. « The structure of fluctuations in stochastic homogenization ». *Comm. Math. Phys.* **377**, nº 1 (2020), p. 259-306. ISSN : 0010-3616. DOI : 10.1007/s00220-020-03722-3. URL : https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.1007/s00220-020-03722-3.

[5] A. Gloria, S. Neukamm et F. Otto. « A regularity theory for random elliptic operators ». *Milan J. Math.* **88**, nº 1 (2020), p. 99-170. ISSN : 1424-9286. DOI : 10.1007/s00032-020-00309-4. URL : https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.1007/s00032-020-00309-4.

[6] A. Gloria, S. Neukamm et F. Otto. « Quantification of ergodicity in stochastic homogenization: optimal bounds via spectral gap on Glauber dynamics ». *Invent. Math.* **199**, nº 2 (2015), p. 455-515.

[7] A. Gloria et F. Otto. « An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations ». *Ann. Probab.* **39**, nº 3 (2011), p. 779-856.

[8] V. V. Jikov, S. M. Kozlov et O. A. Oleĭnik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Berlin : Springer-Verlag, 1994, p. xii+570.

[9] G. C. Papanicolaou et S. R. S. Varadhan. « Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients ». In : *Random fields, Vol. I, II (Esztergom, 1979)*. Vol. 27. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Amsterdam : North-Holland, 1981, p. 835-873.

[10] L. Tartar. *The general theory of homogenization*. **7**. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer-Verlag, Berlin; UMI, Bologna, 2009, p. xxii+470.



Antoine Gloria

Sorbonne Université, CNRS, Université de Paris, Laboratoire Jacques-Louis Lions

gloria@ljll.math.upmc.fr

Antoine Gloria est professeur au laboratoire Jacques-Louis Lions à Sorbonne Université. Il s'intéresse à l'analyse des EDP à coefficients aléatoires.

Je remercie chaleureusement Grégoire Allaire et Joackim Bernier pour leurs rapports détaillés et leurs suggestions sur une version préliminaire de cet article, ainsi que Gabriel Rivière pour son soutien et sa confiance.



Un entretien avec Michèle AUDIN

Propos recueillis le 11 novembre 2021 par Damien Gayet

Commençons par les mathématiques. Quel type de mathématiques pratiques-tu ?

À vrai dire, je ne pratique plus vraiment les mathématiques. Ça n'a pas été une décision de ma part, ça s'est trouvé comme ça. Ce qui m'intéressait c'était la géométrie en général, la géométrie symplectique en particulier, et plus précisément les systèmes intégrables et leurs liens avec la géométrie algébrique. Si je ne fais plus de mathématiques, c'est un peu indépendant de ma volonté, je me suis aperçue que les mathématiques c'était une activité sociale ; je le savais mais je ne m'y attendais pas à ce point-là ; je pensais que j'allais continuer à travailler et faire des mathématiques, mais comme je ne parle plus avec des mathématiciens, c'est le reste qui a pris le dessus.

Quel est le théorème que tu as démontré que tu préfères ?

J'ai fait une étude de certains systèmes intégrables du point de vue de la géométrie algébrique. Je trouvais que j'avais eu une jolie idée pour étudier la topologie de ces systèmes. C'est ça que j'aimais bien.

Quel est le théorème que tu préfères, en général ?

La Formule de Stokes évidemment [1] : « On n'a rien démontré d'intéressant en mathématiques qui n'utilise pas la formule de Stokes ».

Pourquoi la géométrie symplectique ?

Je ne sais plus exactement, j'avais commencé par regarder des choses de topologie algébrique pure et dure et puis petit à petit, je me suis intéressée précisément aux sous-variétés lagrangiennes, puis fatalement à la géométrie symplectique plus généralement.

Pourquoi les sous-variétés lagrangiennes ? Tu te souviens comment ça t'est venu ?

À l'époque il y avait un article d'un mathématicien russe qui s'appelle Viktor Vassiliev, qui faisait de la géométrie énumérative des singularités ; il y a un rapport entre les singularités en général et les sous-variétés lagrangiennes, et c'est en lisant cet article j'ai commencé à m'intéresser à ça. Ensuite en allant à Moscou et en parlant avec Arnold.

C'était avant l'article de Gromov de 1985 sur les courbes *J*-holormorphes ?

Je suis allée à Moscou en 1986, ça n'était donc pas vraiment avant cet article, mais c'était au moment où ça devenait à la mode.

En préparant cette interview j'ai découvert que tu avais un directeur de thèse dont le nom m'était inconnu, François Latour. Qui est-il ?

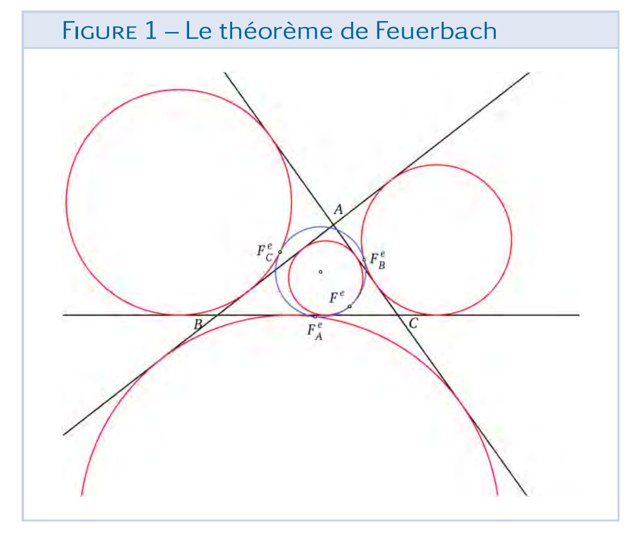
Quand j'étais étudiante à Orsay il y avait quatre mathématiciens, Jean Lannes, Jean Barge, Pierre Vogel et François Latour, qui faisaient de la topologie algébrique. J'avais fait un DEA avec Larry Siebenmann. Et puis j'ai dû avoir un petit syndrome de l'imposteur à ce moment-là : je faisais ce DEA en même temps que Francis Bonahon, je me suis dit que Larry allait s'occuper davantage des mathématiques de Francis. Alors j'ai changé d'idée et je suis allée voir Latour que personne ne connaissait, que personne n'allait voir. Et c'était très bien, il était vraiment remarquable. Quand j'arrivais, je lui disais « il y a un truc que je n'ai pas compris », il me disais « je vais t'expliquer » (je suis pas sûre qu'il me tutoyait), ça durait des heures, et puis j'avais tout compris... bon quand je sortais du bureau je me disais que j'aurais dû prendre des notes (rires)... Il est malheureusement mort assez jeune.

1. *La formule de Stokes, roman*, Paris, Cassini.

Tu es la fille de Josette Audin, professeure de mathématiques, et de Maurice Audin, docteur en mathématiques. En quoi tes parents ont-ils été importants pour ta vocation mathématique ? Est-ce que d'ailleurs tu parlerais de vocation ?

Bon je ne sais pas si j'avais une vocation, mais ce qui est sûr c'est que j'ai fait énormément de mathématiques avec ma mère quand j'étais petite. Bon ma mère ne parlait pas beaucoup et c'était un lieu de communication avec elle, les mathématiques. On en a fait plein. Elle adorait la géométrie, elle était très bonne en géométrie, avec des cercles, des triangles des choses comme ça. Je me rappelle que pendant des années mon idéal ça a été de savoir démontrer le théorème de Feuerbach (« le cercle d'Euler est tangent aux cercles inscrit et exinscrits », voir la Figure 1).

Figure 1 – Le théorème de Feuerbach



Et puis quand je suis arrivée en première, ça s'est mélangé avec le fait que les mathématiques modernes arrivaient au lycée, et ça c'était un grand bonheur pour moi. C'était fabuleux les maths modernes, je regrette de le dire comme ça, tout le monde dit le contraire mais pour les bons élèves c'était formidable, et moi je les ai vraiment appréciées. Comprendre par exemple que les solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, c'est la même chose que le plan dans lequel je faisais de la géométrie, pour moi c'était magnifique. En plus, ma mère qui était prof de maths, elle ne connaissait pas ça du tout, elle a été de la génération de profs de maths qui se sont recyclés à ce moment-là, donc on en a encore beaucoup parlé ensemble. Donc de tenir les deux ensemble, Feuerbach et l'abstraction, pour moi ça a été un grand bonheur des mathématiques.

En 2018, le président de la République, Emmanuel Macron, a explicitement dit que ton père avait été torturé et assassiné par des militaires français, que cela avait été rendu possible par un (je cite) « système légalement institué », et enfin que les archives concernant les « disparus » de la guerre d'Algérie devaient être rendues accessibles. Il semble que, contrairement à cette promesse, cet accès aux archives soit essentiellement toujours bloqué, notamment par le Secrétariat général de la défense et de la Sécurité nationale. Peux-tu et veux-tu nous en dire plus ?

Sur les archives, je vais avoir un peu de mal, parce que c'est assez technique. Sur la déclaration de Macron, il peut nous remercier, parce que c'est à peu près la seule chose qu'il aura faite de vraiment bien durant son quinquennat. En particulier ce qu'il vient de déclarer sur la manifestation du 17 octobre 1961 où il a réussi à ne même pas prononcer le mot « police » et a fortiori « ministre de l'intérieur », et a fortiori « gouvernement », et a fortiori « Président de la République » alors que tous ont couvert ça, ainsi que la répression de la manifestation de Charonne, je trouve ça vraiment en dessous de tout.

Considères-tu que les institutions, les partis et les hommes qui ont légitimé, couvert ou promu la torture et les assassinats de cette guerre ont fait amende honorable ? Penses-tu qu'une situation semblable pourrait se reproduire ?

Il n'y a pas eu d'amende honorable, ils ont tous été amnistiés. Papon c'est pratique, c'est le diable on peut tout lui mettre sur le dos (je ne dis pas, bien sûr, qu'il n'y a rien à lui mettre sur le dos !). Oui bien sûr ça peut se reproduire, la chose essentielle c'est que ça ne se reproduise pas, mais je n'y crois pas. Ça se reproduit.

Tu es depuis plusieurs années une romancière. Comment cette autre vocation t'est-elle venue ?

En fait si je me souviens bien, quand j'étais en 3e, à l'époque l'orientation se faisait en Troisième, j'avais dit que je voulais aller en section littéraire parce que je voulais écrire des romans. J'avais un très bon prof de français et un très, très mauvais prof de maths (ça arrive). Et le prof de français m'a dit « Non, tu vas aller en Seconde scientifique parce que comme ça tu pourras écrire des romans après » (enfin je pense qu'il me vouvoyait). Après je n'ai pas vraiment choisi, les mathématiques ça allait de soi, dans cette génération quand on était bon en maths on était poussé à faire des maths, quand on était bon élève même

on était poussé à faire des maths. J'adore les mathématiques, je suis très contente d'avoir fait des mathématiques, mais quand même j'ai toujours écrit. En fait j'ai écrit mon premier roman quand j'avais sept ans. C'était l'histoire du chien de mon grand-père. Mais je ne l'ai pas conservé.

Tu es membre de l'Oulipo. Peux-tu nous expliquer brièvement comment fonctionne cette association ?

L'Oulipo c'est un ensemble d'écrivains, de mathématiciens, ou autres, des gens qui sont intéressés par la littérature potentielle. Pour expliquer rapidement ce qu'est la littérature potentielle, si je dis « on va écrire un poème de 14 vers, de 12 pieds, avec des rimes abba, etc. », je n'ai rien fait, j'ai fait de la littérature « potentielle ». Si j'écris « C'est un trou de verdure ou chante une rivière... » là j'écris un sonnet. La littérature potentielle c'est définir des formes ou des contraintes pour écrire, pour faire de la littérature. C'est le rôle que s'est assigné l'Oulipo. Comment ça fonctionne ? On se réunit une fois par mois, on discute de potentialité, de littérature, d'idées nouvelles, de ce qu'on fait, quoi. On a aussi des lectures publiques.

Combien êtes-vous à l'Oulipo ?

C'est une bonne question. Tu sais [non, note de l'interviewer] qu'à l'Oulipo on n'en sort jamais, même quand on est mort. On est juste alors excusé. Depuis 1960, on est 41, et il y a actuellement une douzaine d'actifs. Ça en fait quand même un groupe beaucoup plus chic que l'Académie française ! (rires)

Et comment entre-t-on à l'Oulipo ?

Il ne faut pas candidater, on est coopté. C'est le contraire de l'Académie française.

J'ai découvert qu'il existe une centaine de contraintes de l'Oulipo ; quelles sont celles que tu as choisies dans tes romans et pourquoi ?

Je n'ai jamais compté, parce que des contraintes on peut en inventer tous les jours. Quand je suis arrivée d'ailleurs on m'a dit « On a besoin de vous parce qu'on a besoin de contraintes mathématiques nouvelles ». J'ai inventé des histoires à partir de figures géométriques. J'ai écrit un texte assez long avec le théorème de Pascal (six points sur une conique...) ; les six points ce sont des personnages ; quand trois points sont alignés c'est une relation entre les personnages. J'ai écrit aussi un poème sur la rue Desargues à Paris, basé sur le théorème de Desargues. Autrement j'ai utilisé pas mal la sextine, qui c'est une forme poétique inventée au XIIe siècle par un troubadour qui s'appelait Arnaut Daniel. Cette forme est, depuis, extrêmement populaire parmi les poètes. Ça fonctionne comme ça : c'est un poème de six strophes de six vers, il n'y a pas de rime, mais les six mots qui terminent les six vers de chaque strophe sont les mêmes. On passe de la première strophe à la deuxième strophe en faisant une permutation de ces 6 mots, le premier devient le dernier, le deuxième devient le quatrième, voir la figure 2.

Figure 2 – La permutation spirale de la sextine

1 2 3 4 5 6

C'est une permutation particulière, que l'on appelle permutation spirale. Il se trouve que cette permutation est d'ordre 6, donc c'est très bien parce que dans une septième strophe, les mots rimes auraient la même place que dans la première, donc on s'arrête à la sixième strophe. Il y a une question qui a été posée par Queneau : quels sont les nombres autres que 6 pour lesquels ça marche ? 1, 2, 3 ça marche, 4 ça ne marche pas, 5 ça marche, 7, 8 ça ne marche pas. On appelle ça les *nombres de Queneau*. Figure-toi qu'on ne sait même pas s'il en existe une infinité. Il y a une conjecture d'Artin de 1920, toujours ouverte, qui impliquerait cette infinitude. Bon mais on s'en fout que ça soit infini ou pas, parce que si tu prends 40 vers, ça te fait 40 fois 40, ça te fait tout de suite un poème de la taille d'*Andromaque* [de Racine, ndi]. On peut aussi utiliser ce principe de façon sémantique. Je vais prendre onze, j'aime bien onze. Tu prends 11 situations ou 11 choses, tu les permutes et dans chaque chapitre tu dois mentionner ces 11 choses-là dans l'ordre donné par la permutation. Mon roman *121 jours* est écrit comme ça. C'est pour ça qu'il s'appelle *121 jours*.

Dans tes livres, tu aimes décrire les petits détails qu'on ne retrouve pas souvent dans les romans, les odeurs banales, les bruits de fond, les musiques que les gens écoutent, etc. Pourquoi ce souci du détail quotidien ?

C'est un peu relié à ce que Perec appelle l'*infraordinaire*, des choses qui forment la tessiture de la vie. Par exemple dans *Mademoiselle Haas*, il y a une nouvelle où l'héroïne est assise dans un square, elle regarde les gens qui passent. Ça se passe en 1938, le jour des accords de Munich. J'ai tenté de comprendre ce qu'elle voyait. J'ai essayé donc de reconstituer de façon assez précise et sensible ce qui se passe autour d'elle. Par exemple il y avait beaucoup plus d'infirmes dans la rue, parce qu'il y avait eu la première guerre mondiale avant. Dans un roman que j'ai écrit récemment, *Josée Meunier, 19 rue des Juifs*, il y a une perquisition qui se passe dans le Paris de la deuxième moitié du xixe siècle, dans un immeuble plus ou moins ouvrier, pas très cossu. J'ai essayé de décrire la perquisition, tout ce que les policiers voient : les meubles, les objets, les tables, les portes, les vêtements, les gens... et donc le roman commence par 15 pages de description, et ça marche, en tout cas c'est ce que m'ont dit les lecteurs.

Tu as écrit un texte inclassable sur le quotidien de l'Académie des sciences des années 1870, *Mai quai Conti*. D'où te vient cet intérêt pour cette institution ?

Ce n'est pas seulement les années 1870, c'est précisément pendant la Commune de Paris de 1871. Évidemment aujourd'hui l'Académie des sciences c'est un machin complètement désuet, mais il faut comprendre qu'à l'époque et largement jusqu'à la moitié du xxe siècle, c'était une véritable instance de pouvoir. Fatalement, comme je me suis intéressée à l'histoire des mathématiciens, je me suis intéressée à cette institution et à la façon dont elle fonctionne. En plus, et même si ça a changé depuis, les archives de l'Académie étaient extrêmement accueillantes et très faciles d'accès. Pourquoi j'ai écrit cet texte ? C'est pour une raison simple : j'ai lu deux livres de poèmes d'une poète qui s'appelle Michelle Grangaud, qui est membre de l'Oulipo. Ces deux livres sont *Calendrier des poètes* et *Calendrier des fêtes nationales*. Elle prend les jours de l'année et elle fait une liste de choses qui se sont passées ce jour-là, indépendamment de l'année. Le dernier item, c'est toujours la création d'un opéra ou d'une œuvre littéraire. J'avais envie d'écrire un truc du même genre. Mais je me suis dit que pour les mathématiques, on ne peut pas dire que tel théorème a été démontré tel jour. Alors j'ai réalisé que l'Académie des sciences se réunit tous les lundis et il y a des choses qui sont présentées ce jour-là. J'ai cherché une période un peu courte... et malheureusement c'est le cas de la Commune de Paris. J'ai été regarder ce qui se passait à l'Académie pendant la Commune de Paris. Évidemment beaucoup de ces messieurs ont quitté Paris pendant la Commune, mais une vingtaine sont restés à Paris. Ils viennent tous les lundis pour affirmer que la science continue. Et là j'ai été frappée par une chose assez incroyable. Parmi ces gens-là il y a Michel Chasles, le Chasles de la relation de Chasles. Lui vient toutes les semaines et il apporte, je ne sais pas, peut-être cinquante théorèmes par semaine ! Ce sont des théorèmes sur les courbes, et c'est facile d'en avoir plusieurs, il suffit de changer le degré de la courbe. Il utilise aussi la dualité projective, ça multiplie le nombre de théorèmes par deux ! À la fin des 72 jours de la Commune de Paris, il a apporté cinq cents théorèmes ! Je trouvais que c'était une accumulation poétique très intéressante. En même temps politiquement c'est intéressant, parce qu'il existe une convergence objective entre ces gens qui veulent affirmer que malgré la Commune, la science continue, et les communards qui eux, veulent que la Science existe pour le peuple. Par exemple il y a un envoyé du journal officiel de la Commune qui va toutes les semaines et qui écrit un compte-rendu hebdomadaire. C'est comme ça que j'ai découvert l'histoire de la Commune en détail.

Tu tiens également un formidable blog sur la Commune de Paris, en temps réel... translaté de 150 ans. Comment t'est venue cette idée ? Qu'est-ce qui t'intéresse dans ce moment bien singulier de l'histoire de France ?

Ce qui m'intéresse, c'est que c'est un moment où tous ces gens, tous ces inconnus, tous ces anonymes à qui on ne donne jamais la parole, la prennent. Ils prennent même le pouvoir. Ça ne dure pas longtemps mais quand même, 72 jours, c'est ce qu'on dit. C'est un moment absolument unique dans l'histoire de France. Donc ça vaut la peine de regarder ce qu'ils ou elles ont fait et dit. C'est une autre forme de démocratie que celle dans laquelle on vit maintenant, où l'on se contente d'élire un représentant tous les 5 ans. Là il y a vraiment une démocratie participative. Après avoir écrit *Mai, quai Conti*, j'avais envie d'écrire un roman qui se passe pendant la Commune. À ce moment-là j'ai continué à apprendre des choses sur la Commune et je me suis aperçue que je savais trop de choses. Je ne

pouvais pas écrire de roman à cause de ça, ça m'encombrait, ça aurait fait un truc pédant. Je ne savais pas quoi faire, et je me suis dit je vais faire un blog. Au début ça m'a servi de déversoir de tout ce que je ne voulais pas mettre dans le roman. Puis j'ai écrit le roman *Comme une rivière bleue*, et pendant ce temps le blog avait pris son identité autonome, et j'ai continué à chercher et à apprendre des trucs, que même d'autres gens ne savent pas, parfois.

Tu as un exemple ?

J'ai publié plein de trucs qui étaient complètement oubliés ou inconnus. Ce qui m'intéresse, c'est plutôt les anonymes. C'est une période sur laquelle on a très peu de témoignages. D'abord les gens ne savent pas écrire, puis ils sont enfermés ensemble dans Paris donc ils n'ont pas besoin de s'écrire, et puis en plus il y a eu une répression énorme qui fait qu'on s'est débarrassé de tout ce qu'on avait de compromettant. Or le papier, c'est malheureusement la chose la plus facile à détruire. Donc on a très peu de de témoignages et j'en ai récupéré quelques-uns. Par exemple, en mars prochain, je vais publier des lettres de soldats versaillais qui ont participé au massacre des communards. J'en profite pour lancer un appel. Si les lecteurs de la *Gazette* ont des lettres de soldats et de leur famille, je veux bien les lire.

Tu as écrit un roman sur Gaston Julia, sans le nommer. Pourquoi Julia ?

La question est un peu délicate. Je n'ai pas écrit un roman sur Julia, j'ai écrit un roman sur les mathématiciens dans la première moitié du xxe siècle. Il se trouve que j'ai écrit un livre sur Julia et Fatou et le Grand prix des sciences mathématiques en 1918[2]. C'est un livre d'histoire. Gaston Julia c'était un grand blessé de la première guerre mondiale, une gueule cassée. Il a vécu toute sa vie avec un masque en cuir sur le visage, il a subi je ne sais pas combien de centaines d'opérations. C'est vraiment une histoire assez terrible. Quand ce livre est paru, il y a des ayants droits de la famille Julia que ça a énervés, je suppose parce qu'ils craignaient que, après ça, j'aborde la question de l'attitude de Julia pendant la seconde guerre mondiale. J'ai lu la correspondance de Julia avec Helmut Hasse, qui est un mathématicien allemand, qui venait à Paris pendant l'Occupation pour chercher des mathématiciens qui collaborent à Zentrallblatt. Hasse a une correspondance extrêmement amicale avec Julia. Hasse a gardé toutes les lettres de Julia et il a gardé aussi les doubles de lettres qu'il lui a envoyées, il était très bien organisé et, coup de chance, Göttingen n'a pas été bombardée par les Américains, donc ces archives existent. Je pensais franchement les publier ou en publier des extraits. Le responsable des archives à Göttingen a dit qu'il faut que les ayants droits soient d'accord. Il n'y avait évidemment aucun problème avec les ayants droits de Hasse, mais je n'avais pas envie de me battre avec ceux de Julia. Finalement j'ai écrit un roman. Mais attention, les personnages sont complètement imaginaires. C'est pas seulement un problème avec Julia ou le personnage du livre qui n'est pas Julia, c'est que beaucoup de ces grands blessés ont été instrumentalisés par les Allemands dans les années 30 : grands blessés, donc contre la guerre, donc pacifistes, donc pro-allemands. Certains sont devenus des collaborateurs plus ou moins actifs. C'est ça qu'on voit dans ce roman, la transformation d'un jeune mathématicien assez brillant, en gueule cassée, puis en collaborateur. Il y a aussi des femmes dans ce livre mais c'est quand même une histoire d'hommes. C'est pour ça que j'ai arrêté de travailler sur les mathématiciens, c'est parce qu'il n'y a pas assez de femmes pour que ça soit intéressant (rires).

Quel est ton point de vue concernant le problème de la faible présence des femmes en mathématiques ? Quelles solutions préconiserais-tu ?

Ça fait plus ou moins cinquante ans que je me pose cette question. Dans les années 70 (j'avais 20 ans en 1974), il y avait un féminisme important, des tas d'acquis, on avait l'impression que ça allait s'arranger, et puis ça ce ne s'est pas arrangé, les choses ont empiré, le mot féministe est devenu une injure. Ça n'avance pas. On parle de femmes et de féministes tout le temps mais il y a encore moins de femmes qu'avant en mathématiques.

Que penses-tu par exemple de la fermeture de l'École normale supérieure de Sèvres, qui était non mixte ?

Cette histoire de mixité ça a été très compliqué : quand on a fondé l'association Femmes et mathématiques, c'était en réaction à ça, cette soit-disante mixité qui faisait qu'il n'y avait plus de femmes du tout. On avait l'air d'être très réactionnaires pour être contre la mixité. Mais je pense que grâce à cette non mixité, c'était peut-être plus facile pour des jeunes femmes de se mettre à faire des maths

2. *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après.*

en étant entre elles, sans avoir le poids de ces adolescents impubères qui criaient « moi je sais moi je sais », comme je les ai connus (rires).

As-tu subi du sexisme pendant ta carrière ?

C'est difficile de répondre à cette question. Il y a eu évidemment du sexisme. En même temps, c'est vrai aussi qu'on était plus visible quand on était une femme. C'est vrai que quand je suis arrivée à Strasbourg où j'ai candidaté à un poste de prof en 1987, les vieux messieurs qui étaient là-bas m'ont dit « on n'est pas sûr qu'on est mûr pour recruter une femme ». C'était leur problème, leur maturité, c'était pas le mien ! Et je dois dire que toute ma vie professionnelle que j'ai passée à Strasbourg où j'étais presque tout le temps la seule femme en 25e section, chaque fois que j'allais à une réunion de profs de maths pures et que j'ouvrais la bouche, je savais que ça n'était pas moi qui parlais, mais que tous mes collègues pensaient : elle dit ça parce qu'elle est une femme. Donc bon, c'était un peu pénible. Oui, il y a toujours des petits machos. Si j'allais faire un colloquium de mathématiques hors de Strasbourg, il y avait les gens qui m'invitaient et qui me connaissaient, mais il y avait aussi des jeunes, des doctorants, des postdocs, qui étaient des mecs, et à la fin de mon exposé, il y en avait toujours un qui se levait et qui m'expliquait des choses que je n'avais pas comprises sur le sujet dont j'étais spécialiste – et qui disait des conneries ! – Et c'était toujours comme ça, ça m'est arrivé vachement souvent. Bon moi je m'en fous, je savais répondre à ça, mais en même temps, c'est vrai que c'était un peu pénible.

Merci Michèle pour cette interview !



Michèle Audin, née en 1954 à Alger, est spécialiste de géométrie et de topologie. Elle a travaillé en particulier sur les liens entre intégrabilité des systèmes intégrables, topologie algébrique et géométrie symplectique. En parallèle de son travail de mathématicienne, elle écrit des articles et des ouvrages d'histoire des mathématiques des deux derniers siècles, en particulier sur la vie et les idées, mathématiques ou non, de mathématiciennes comme Sofia Kovalevskaïa ou des mathématiciens comme Jacques Feldbau ou Gaston Julia et Pierre Fatou. Ce travail d'historienne, en particulier autour de l'Académie des sciences, l'a amenée à s'intéresser à la Commune de Paris, au sujet de laquelle elle a publié des textes historiques et des éditions de lettres, mais également trois romans. Elle a par ailleurs publié une biographie de son père, Maurice Audin, assassiné par l'armée française pendant la guerre d'Algérie. Michèle Audin est membre de l'Oulipo depuis 2009 et publie aussi des romans.



Vers la fin des promotions nationales des enseignants-chercheurs

La dernière évolution en date des missions des sessions du CNU concerne la fin des promotions au niveau national. Ci-dessous un texte envoyé par les présidents des sections 25 et 26, la lettre que la présidente de la CPCNU (Commission permanente du Conseil national des universités) a fait parvenir à la ministre et la motion votée le 10 décembre 2021 par la CPCNU.

Le bureau de la commission permanente du CNU (CPCNU, qui réunit l'ensemble des bureaux des sections) a été informé, dans une réunion avec la DGRH en amont de l'assemblée générale de la CPCNU qui s'est tenue le 10 décembre dernier, de modifications supplémentaires à venir du décret de 84 régissant les corps d'enseignants-chercheurs, et visant à supprimer le contingent national des avancements de grade accordés par les CNU. Cela a été présenté comme sans rapport avec la LPR, mais comme une nécessité suite à la loi dite de transformation de la fonction publique, adoptée en 2019, et qui met fin aux prérogatives en matière de carrière des commissions administratives paritaires.

Ainsi, si ces modifications devaient voir le jour, toutes les promotions seraient décidées au niveau de chaque établissement, à partir de 2023, avec un avis consultatif des sections CNU, suivant une procédure proche de celle qui se met en place pour le repyramidage des corps.

Cela ne serait bon ni pour les mathématiques, ni pour les mathématiciens et mathématiciennes, ni pour l'Université. Le double contingent, national puis local, semble à nombre d'entre nous un équilibre, disciplinaire et géographique, à défendre. Notre communauté (sections 25 et 26) y perdrait d'ailleurs beaucoup, si l'on en croit l'historique des promotions passées, avec un ratio de 3 promotions nationales pour 2 locales en sections 25-26 pour les 5 dernières années par exemple.

Vous savez, sans doute, que la PEDR est supprimée, et que le décret concernant le RIPEC, qui contient les informations sur la prime qui va la remplacer, n'est pas finalisé (ou ne nous a pas été communiqué), alors même que la DGRH construit le calendrier prévoyant l'examen des demandes en 2022. Si nous ne pouvons que nous féliciter de l'augmentation de la prime d'Enseignement Supérieur que nous touchons tous, les projets concernant la prime qui doit remplacer la PEDR laissent déjà rêveurs ceux qui ont eu le courage de les lire.

C'est en réaction à l'information concernant la suppression des promotions nationales, que l'assemblée générale de la CPCNU a voté, par un vote à bulletin secret, une motion appelant à une démission des membres du CNU pour le 11 mars prochain si aucune garantie sérieuse ne nous est donnée d'ici là.

Ce calendrier permet un temps d'échange dans les sections, tout en préservant les sessions de qualification qui se dérouleront en février.

Mais il y a un moment où il faut savoir dire stop et où nous ne devons pas accepter de ne devenir, en tant que sections CNU, que des chambres de validation, purement consultatives et jamais décisionnaires, sur les carrières des collègues que nous sommes censés représenter. Au-delà de la question de l'évaluation scientifique suivant nos critères disciplinaires, cruciale pour les mathématiques mais aussi pour beaucoup de disciplines à faibles effectifs, un système de promotion uniquement local porte en germe une diminution à venir des quotas de promotion, sous la pression des contraintes budgétaires : rappelons que nombre d'établissements n'ont pas distribué l'intégralité de leur quota local ces dernières années.

Finalement, le corollaire de toutes ces évolutions, c'est que nous ne serons plus, comme enseignants chercheurs, que les employés de nos administrations locales, sans dimension nationale, sous couvert d'une mise en conformité avec les statuts révisés de la fonction publique ; rappelons que les enseignants-chercheurs ont, de tout temps, eu un statut dérogatoire, dont certaines dispositions, comme la liberté académique, ont acquis, au fil de la jurisprudence, une valeur constitutionnelle. Qu'en restera-t-il demain, dans un face à face avec son établissement ?

Bonne lecture,

Fabrice Planchon, président de la section 25, et Fabienne Comte, présidente de la section 26.



CP-CNU

CNU

Sylvie Bauer

Présidente de la CP-CNU

à

Madame la Ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation

Paris, le 10 décembre 2021

Madame la Ministre,

Le Bureau de la CP-CNU vient d'apprendre de la DGRH du MESRI que l'avancement de grade au niveau national, opéré par les sections du CNU, serait supprimé dès 2023. Cette mesure aurait pour conséquence directe une attribution exclusivement locale des avancements de grade des enseignants-chercheurs.

Ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, ancienne Présidente d'Université, vous n'êtes pas sans savoir combien les Enseignants-Chercheurs sont attachés au processus d'avancement par la voie nationale. Seule l'existence de contingents nationaux et locaux permet en effet une répartition équilibrée tant par discipline que par établissement. En envisageant de supprimer le contingent national par section, ce projet remet en question la capacité de garantir l'expertise scientifique pour l'appréciation des différents aspects de la carrière.

Réunis en Assemblée Plénière, le 10 décembre 2021, les membres de la CP-CNU s'opposent à la mise en œuvre de ce projet qui s'ajoute à d'autres remises en cause des prérogatives du CNU. Ils vous demandent de bien vouloir dissiper clairement les inquiétudes de la communauté et de renoncer explicitement à la suppression des contingents nationaux disciplinaires d'avancement. À défaut de garantie du maintien des deux voies complémentaires apportée au plus tard le 10 mars 2022, la CP-CNU appelle à la démission des membres des sections CNU.

Je vous prie d'agréer, Madame la Ministre, l'expression de mes respectueuses salutations,

Sylvie Bauer





Paris, le 10 décembre 2021

Suppression de l'avancement de grade des enseignant.e.s-chercheur.e.s au niveau national

Le Bureau de la CP-CNU[1] vient d'apprendre de la DGRH[2] du MESRI[3] que **l'avancement de grade au niveau national, opéré par les sections du CNU, serait supprimé dès 2023**. S'inscrivant dans un processus continu de restriction des missions de l'instance nationale, cette mesure aura alors pour conséquence directe une attribution exclusivement locale des promotions des enseignant.e.s-chercheur.e.s. En supprimant le contingent national par section, elle remet en question la capacité de garantir les équilibres disciplinaires et l'expertise scientifique pour l'appréciation des différents aspects de la carrière.

Aussi, la CP-CNU, réunie en Assemblée Générale le 10 décembre 2021, a décidé **d'appeler à la démission des membres des sections CNU en l'absence de garantie apportée par la ministre sur le maintien des contingents nationaux avant le 10 mars 2022**. Elle demande à toutes et tous les enseignants-chercheurs de manifester dès maintenant leur opposition à la disparition du contingent national, au sein de leurs établissements, dans les structures scientifiques et culturelles qu'ils et elles animent, ainsi que dans les instances auxquelles ils et elles participent et en soutenant la lettre ouverte adressée ce jour à la ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation.

[1] Commission Permanente du Conseil National des Universités
[2] Direction Générale des Ressources Humaines
[3] Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation

Lettre ouverte de mathématiciens russes au comité exécutif de l'IMU à propos du mathématicien et prisonnier politique Azat Miftakhov

Chers et chères membres du Comité exécutif de l'Union mathématique internationale (IMU),

À l'été 2022, des mathématiciens du monde entier vont se rassembler pour célébrer les résultats de nos collègues, et notre discipline en général, pendant le Congrès international des mathématiciens qui doit avoir lieu à Saint Pétersbourg, en Russie. Cet événement est de la plus haute importance pour la communauté mathématique mondiale. La liberté de réunion, la coopération scientifique ouverte entre des communautés académiques de nations différentes et la neutralité politique sont toutes des valeurs fondamentales que le Congrès va garantir à tous les mathématiciens, ce pourquoi nous saluons la décision d'organiser le Congrès en Russie et de rendre possible la participation de centaines de nos collègues. Pourtant, un mathématicien russe est privé de cette opportunité par les autorités russes, pour des motifs politiques – en opposition aux valeurs mêmes qui sont chères à l'IMU.

Nous faisons référence à Azat Miftakhov, étudiant diplômé de la faculté de mécanique et de mathématiques de l'université d'État de Moscou et militant anarchiste, qui a été illégalement incarcéré par les autorités russes depuis le 1er février 2019. Accusé d'avoir brisé une vitre d'un bureau local du parti dirigeant de Russie, il a été initialement détenu sous l'accusation de tentative d'attaque terroriste. Grâce à la prompte réaction de la société civile et de la communauté mathématique mondiale, cette accusation a été abandonnée par les procureurs d'État, mais Miftakhov a été cependant reconnu coupable d'« hooliganisme » et condamné à une détention de six ans dans une prison fédérale – peine qu'il est toujours en train de purger. Pour le moment, il est forcé de travailler dans une scierie malgré des problèmes de santé et on lui refuse l'accès aux publications mathématiques récentes en anglais.

Les faits ne laissent aucun doute sur les motivations politiques derrière sa persécution. Il a été signalé qu'Azat et d'autres détenus ont été torturés pour les contraindre à des confessions (y compris par des menaces de pénétration avec un tournevis), que les autorités ont fait pression sur la famille d'Azat tout au long des procédures pénales. Toute l'accusation repose exclusivement sur le témoignage d'un « témoin secret » qui n'a pas résisté à l'examen public. Il y a eu de plus une apparente campagne de dénigrement contre Miftakhov dans des médias chauvins, dont certains contrôlés par l'état, campagne qui a inclus l'utilisation d'insultes homophobes contre lui et la diffusion d'informations privées qui n'ont pu être acquises de manière légale, comme des photos intimes d'Azat ou des enregistrements d'appels téléphoniques avec sa mère.

L'affaire Miftakhov n'est en aucune manière un cas isolé : depuis le 31 janvier 2018, quand a eu lieu le crime dont Azat a été accusé, le Service fédéral de sécurité de Russie (connu sous le sigle de FSB) a redoublé sa répression contre les personnes ayant des opinions anarchistes en Russie. Par ailleurs, la communauté académique en général est devenue depuis la cible d'une pression croissante ou même de répression directe de la part des autorités russes. Il y a une longue liste de scientifiques russes arrêtés par le FSB, prétendument pour trahison ou espionnage, dont Valery Mitko, Valery Golubkin, Viktor Kudryavtsev et beaucoup d'autres. Les répressions contre les universitaires russes ne sont pas limitées aux sciences naturelles, un sociologue et recteur d'une importante université russe non étatique, Sergei Zuev, faisant partie des victimes les plus récentes.

Les soutiens venant de l'American Mathematical Society, de la London Mathematical Society, de la Société Mathématique de France, de l'Unione Matematica Italiana, de la Sociedade Brasileira de Matemàtica et, enfin et surtout, de 54 membres de l'Académie des sciences de Russie témoignent amplement que la communauté mathématique internationale est gravement préoccupée par la situation. Une pétition pour faire entendre la voix sur

l'affaire Miftakhov a été signée par plus de 300 mathématiciens, et soutenue par les Sociétés mathématiques d'Espagne, de France et d'Ukraine. Après tout, l'Union mathématique internationale a elle-même appelé le gouvernement russe à laisser Miftakhov terminer ses études doctorales en France, où la Fondation mathématique Jacques Hadamard et le Laboratoire de mathématiques d'Orsay lui ont proposé une position.

Si une attitude plus ferme et plus active n'était pas prise sur la question, l'appel pour la relaxe de Miftakhov tomberait dans l'oreille d'un sourd et ne provoquerait aucune réaction de la part du gouvernement russe – l'appel des 54 académiciens russes a ainsi échoué. Laisser simplement un haut responsable de la FSB, Dmitry Derevyashkin, sur la liste des organisateurs du Congrès international des mathématiciens (ICM) et permettre au Premier ministre de Russie, Mikhail Mishustin, de s'auto-promouvoir sur le compte twitter officiel de l'ICM, pendant qu'Azat reste incarcéré et contraint à travailler dans une scierie au lieu de faire de la recherche en mathématiques sont des actes qui vont contre les valeurs de neutralité politique et de solidarité professionnelle sur lesquelles l'IMU est construite. Nous sommes d'accord avec le fait que boycotter des événements scientifiques est inacceptable, mais continuer une collaboration avec les personnes et les organisations mêmes qui sont coupables de la persécution politique de scientifiques dans notre pays l'est aussi. C'est pourquoi nous soutenons l'idée exprimée par Ahmed Abbes et Cédric Villani et appelons l'IMU à faire ce qu'elle a eu une fois la bravoure de faire, en réponse à des répressions contre nos collègues mathématiciens : repousser le Congrès international des mathématiciens jusqu'au moment où Azat sera relâché de prison ou son affaire révisée, dans une procédure qui respecte ses droits constitutionnels. De plus, nous croyons fermement que le Congrès, se tenant en Russie, doit inclure un panel sur les mathématiciens en danger, par exemple ceux et celles qui sont persécutés pour des raisons politiques par des régimes autoritaires, panel qui serait ouvert au public et largement couvert par des journalistes indépendants.

La peine d'Azat doit se terminer le 5 décembre 2023, ce qui rend tout à fait possible de préserver la sorte de célébration que le Congrès international est pour chacun, et pas seulement pour ceux et celles qui ont la chance de ne pas être arbitrairement persécutés par un gouvernement autoritaire. La frilosité à agir serait un stigmate sur la réputation de l'IMU en tant qu'organisation professionnelle engagée pour les valeurs de liberté scientifique et de neutralité politique.

Signé initialement par 55 mathématiciens russes, y compris 18 signataires dont nous ne divulguons pas publiquement les noms pour leur sécurité et leur protection. La liste à jour des signataires est disponible à cette adresse www.tinyurl.com/mueuedac.

Liste des 37 signataires publics :
Dmitri Alekseevsky, Institute for Information Transmission Problems ; Alexey Balitskiy, IAS ; Alexander Bufetov, CNRS ; Alisa Chistopolskaya, NRU HSE ; Rodion Deev, IMPAN ; Anna Dmitrieva, University of East Anglia ; Ilya Dumanski, MIT ; Alexander Efimov, NRU HSE and Steklov Mathematical Institute ; Nikita Gladkov, UCLA ; Lyalya Guseva, non autorisée à révéler son affiliation ; Michael Hitrik, UCLA ; Andrei Ionov, MIT ; Grigory Ivanov, MIPT et IST Austria ; Ilya Kapovich, Hunter College of CUNY ; Roman Karasev, Institute for Information Transmission Problems ; Nikolai Konovalov, University of Notre Dame ; Dmitri Korshunov, IMPA ; Dimitri Markushevich, Université de Lille ; Irina Mamsurova, NRU HSE ; Sergey Melikhov, Steklov Mathematical Institute ; Leonid Monin, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences in Leipzig ; Slava Naprienko, Stanford University ; Victor Ostrik, University of Oregon ; Alexander Petrov, Harvard University ; Leonid Petrov, University of Virginia ; Aleksei Piskunov, NRU HSE ; Alexander Popkovich, NRU HSE ; Vladimir Protasov, Moscow State University ; Vasily Rogov, Humboldt University of Berlin ; Ivan Solonenko, King's College London ; Grigory Taroyan, NRU HSE ; Gleb Terentiuk, University of Michigan ; Alexandra Utiralova, MIT ; Misha Verbitsky, IMPA ; Anatoly Vershik, branche de Saint Petersbourg du Steklov Mathematical Institute ; Bogdan Zavyalov, Max Planck Institute for Mathematics ; Efim Zelmanov, UC San Diego.



Lauréat.e.s de l'agrégation sans stage

• C. Armana

Chaque année des doctorant.e.s et jeunes docteur.e.s agrégé.e.s de mathématiques demandent un détachement ou une disponibilité auprès de leur rectorat en vue de poursuivre leurs travaux de recherche et voient leur demande refusée en raison des besoins d'enseignement dans leur académie. La SMF a l'habitude d'apporter son soutien aux recours formulés par ces personnes. L'objet de ce billet est d'attirer l'attention sur la mésaventure inédite et ubuesque vécue par deux jeunes agrégé.e.s qui va à rebours des situations évoquées ci-dessus. Bien que lauréat.e.s récent.e.s de l'agrégation externe, le Ministère de l'Éducation nationale les a informé.e.s dans le courant de l'été qu'ils n'auraient pas d'affectation à la rentrée 2021, les contraignant à reporter leur stage d'un an et les mettant face à la perspective de passer une année sans emploi.

Ces étudiant.e.s avaient suivi un M2 recherche en 2020/21 et espéraient obtenir une bourse de thèse pour la rentrée 2021. Au moment de la phase des vœux d'affectation sur la plateforme SIAL [1] au mois de mai, ils ont donc choisi le vœu « en attente de contrat doctoral ». Le Bulletin Officiel définissant les règles et modalités d'affectation prévoit qu'en cas de non-obtention du contrat, l'affectation en académie peut se faire « en fonction des nécessités de service », éventuellement sur l'ensemble du territoire. N'ayant finalement pas obtenu de contrat doctoral, les étudiant.e.s concerné.e.s ont contacté le 9 juillet la Direction Générale des Ressources Humaines du Ministère pour solliciter une affectation en académie (pour rappel les résultats du concours 2021 sont parus le 5 juillet). Il leur a été répondu le 26 juillet qu'aucune place de stagiaire n'était disponible pour eux et qu'ils seraient placés automatiquement en report de stage à la rentrée.

Cette situation semble absurde au regard des besoins en enseignant.e.s de mathématiques dans les collèges et lycées de France. Par ailleurs c'est la première fois qu'elle se produit dans notre académie. Pour l'un.e des deux étudiant.e.s concerné.e.s et grâce à des interventions soutenues (présidence du jury du concours, SMF), une affectation en stage lui a été proposée trois semaines après la rentrée. L'autre a finalement pris d'autres engagements et renoncé à des démarches supplémentaires pour obtenir un stage en académie cette année.

Au-delà des conséquences personnelles pour ces deux lauréat.e.s, nous pouvons nous inquiéter de la généralisation éventuelle de ce phénomène et de ses répercussions sur le vivier des étudiant.e.s en M2 recherche et en doctorat. Dans de nombreuses universités, un parcours traditionnel consiste à préparer l'agrégation de mathématiques puis suivre un M2 recherche. Par ailleurs les résultats d'attribution des contrats doctoraux ne sont pas toujours connus au moment de la phase des vœux sur SIAL : la plupart des agrégé.e.s envisageant de continuer en thèse sont donc contraint.e.s de formuler leurs vœux à l'aveugle. Si le vœu « en attente de contrat doctoral » sans obtenir de contrat expose au risque d'une année de césure forcée, cela pourrait dissuader des jeunes agrégé.e.s de poursuivre en thèse ce qui serait tout à fait dommageable pour notre formation doctorale. Nous devrions rester attentif.ve.s à la mise en œuvre de ce nouveau type de directive de la part du Ministère.

1. Système d'information et d'aide aux lauréats.

L'inauguration de la fédération MARGAU*x*

- M. Barkatou
- S. Boissière
- F. Caubet
- R. Imekraz
- R. Loubère



Inaugurée à La Rochelle les 28-29 juin 2021, la Fédération MARGAU*x* (FR 2045 du CNRS) est la vitrine de toutes les activités de recherche en mathématiques menées en Région Nouvelle-Aquitaine. Elle est aussi le lieu d'échanges et de discussion des intérêts scientifiques des mathématiciennes et des mathématiciens travaillant dans cette grande région, dans les unités de recherche de Bordeaux, Limoges, Pau, Poitiers et La Rochelle : au total ce sont environ 350 permanents et 200 doctorantes et doctorants qui tissent des liens scientifiques de proximité.

Une inauguration en présentiel !

Les journées d'inauguration ont été l'acte fondateur de la création de la fédération MARGAU*x*. Cette rencontre a heureusement pu avoir lieu en présentiel dans les locaux de l'université de La Rochelle, bien qu'avec une jauge réduite en raison des restrictions sanitaires : elle a donc été intégralement retransmise en direct en vidéo.

Les conférencières et conférenciers ont mis en lumière les recherches effectuées dans la Région, tout en restant accessibles au plus grand nombre. Nous avons eu à cœur de faire ressentir le continuum des recherches en mathématiques, des plus fondamentales aux plus appliquées :

- Cécile Taing (LMA, université de Poitiers) : « *Dynamiques de masses de Dirac dans des modèles EDP issus de la biologie évolutive* » ;
- Vladimir Salnikov (CNRS, LaSIE, La Rochelle Université) : « *Géométrie généralisée et graduée en mécanique et physique théorique* » ;
- Alice Pellet-Mary (IMB, université de Bordeaux) : « *Réseaux algébriques en cryptographie* » ;
- Marc Moyon (XLIM, université de Limoges) : « *La résolution des équations quadratiques entre les pays d'Islam et l'Europe latine* » ;
- Jonathan Jung (LMAP, université de Pau) : « *Méthode de volumes finis pour la mécanique des fluides compressibles et problème de précision à bas nombre de Mach* » ;
- Thomas Cluzeau (XLIM, université de Limoges) : « *Contributions récentes en théorie de Galois différentielle effective* » ;
- Mahdi Tekitek (LIA, La Rochelle Université) : « *Modèle de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiple pour les équations d'advection-diffusion. Applications au traitement des images ultrasons et images radars* ».

Visionnez les enregistrements des conférences sur la page internet de la fédération :
`https://federation-margaux.math.cnrs.fr`

Notre mission

Répondant à la volonté des mathématiciennes et mathématiciens de Nouvelle-Aquitaine d'unir leurs forces, la fédération MARGAU*x* est née le 1[er] janvier 2021, à l'initiative de l'Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions (INSMI) du CNRS. Elle réunit :

- l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB), UMR CNRS 5251 ;
- l'axe « Mathématiques et Sécurité de l'Information » (MATHIS) du laboratoire XLIM de l'uni-

Photo de groupe des participants à l'inauguration de MARGAU*x*



versité de Limoges, UMR CNRS 7252 (INSIS, institut secondaire INSMI) ;
- le Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Pau (LMAP), UMR CNRS 5142 ;
- le Laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers (LMA), UMR CNRS 7348 ;
- le Laboratoire de Mathématiques, Images et Applications (MIA) et l'axe « Méthodes mathématiques et numériques pour les phénomènes de transfert » (M2N) du Laboratoire LaSIE, UMR CNRS 7356 (INSIS) de l'université de La Rochelle.

MARGAU*x* couvre un spectre presque complet des recherches contemporaines en mathématiques, des plus fondamentales aux plus appliquées. Ces recherches tissent leurs liens ailleurs en France et à l'international. Le bureau de direction est composé de Moulay Barkatou (XLIM), Samuel Boissière (LMA, directeur de la fédération), Fabien Caubet (LMAP), Rafik Imekraz (MIA) et Raphaël Loubère (IMB, directeur-adjoint de la fédération).

Nos actions

Pour le monde éducatif

Nous sommes impliqués dans la diffusion des connaissances pour mettre en valeur l'ancrage très moderne des mathématiciennes et mathématiciens et montrer une image positive des chercheuses et chercheurs en mathématiques. Nous participons activement à des rencontres en collèges et lycées pour présenter nos recherches, leurs applications et leurs interactions avec les autres disciplines.

Pour nos doctorantes et doctorants

Nous proposons aux jeunes docteures et docteurs de la Région de participer à « l'arène MARGAU*x* », qui leur finance un tour des cinq sites de la région pour présenter leurs travaux et se faire connaître.

Pour nos collègues

Notre fédération permet à tous les collègues de la Région de répondre aux appels à projets de l'INSMI : chercheurs invités, accueils en délégation CNRS, PEPS... Elle facilite, incite et soutient financièrement les activités de recherche entre les chercheuses et chercheurs de la Région. Elle contribue à l'attractivité de nos unités de recherche en favorisant les collaborations de proximité.

Pour plus d'information, contactez-nous à l'adresse :
`federation-margaux@math.cnrs.fr`.

Bilan des sessions 2021 du CNU section 25

1. Qualifications et CRCTS

Compte-tenu des conditions sanitaires, la session d'examen des qualifications, qui comporte également l'examen des demandes de CRCTS au titre du contingent national, s'est déroulée entièrement en ligne le 15 et le 16 février 2021.

1.1 – Qualifications

Cette année a été marquée par la disparition, en cours de procédure, suite au vote de la loi n° 2020-1674 du 24 décembre 2020 (dite LPR), des dossiers de demandes de qualification Professeur pour les Maîtres de conférences et assimilés, ces derniers étant considérés comme dispensés de qualification au titre de l'article L. 952-6 du Code de l'éducation. Il convient de souligner que le terme « assimilés », employé par le MESRI, fait référence aux corps assimilés au corps des MCF (personnels EPHE/ENC/EFEO, EHESS, Collège de France, CNAP, CNAM, MNHN, ENSAM), mais **pas** aux chercheurs des EPSTS. Le CNU a donc examiné, et continuera à examiner, des demandes de qualification Professeur émanant de candidats chercheurs (CNRS, INRA, etc.) ainsi que des candidats en poste à l'étranger.

Concernant les qualifications, aux fonctions de maître de conférences d'une part et de professeur des universités d'autre part, le tableau qui suit résume les données des trois dernières années, y compris 2021. La section a pour pratique de qualifier les dossiers qui présentent des éléments tangibles d'activité de recherche et d'enseignement relevant du CNU25 : les dossiers non qualifiés sont majoritairement des dossiers qui ont été considérés comme ne relevant pas des champs disciplinaires couverts par la 25, à l'exception d'une poignée de dossiers insuffisants ou insuffisamment renseignés (sur le volet recherche notamment). La section accepte, par exemple pour des dossiers venant de soutenir, la présence de prépublications comme attestant d'une activité de recherche avérée, au delà de la simple soutenance. Pour les renouvellements de qualification, de la même façon, la section considère indispensable la présence d'éléments d'activité sur la période couverte par la qualification précédente.

Enfin, des dossiers apparaissent naturellement comme relevant de plusieurs sections : le cas le plus fréquent est celui de 25 et 26, mais l'on rencontre également 25 et 27, ainsi que 25 et 72. Dans tous ces cas, les dossiers peuvent tout à fait être qualifiés en 25 et dans l'autre section, en fonction des éléments présentés au regard des critères de la section concernée.

On note cette année un plus grand nombre de candidats classés Hors Section, et le nombre global de candidats est en baisse, peut-être en partie en raison de la situation sanitaire et des allongements potentiels de durée de thèse qui en ont résulté. Les sections CNU avaient obtenu du MESRI un allongement des délais de dépot de pièces, pour permettre des soutenances plus tardives, dispositif qui a été reconduit pour la campagne de qualification 2022.

Tableau 1 – Maître de conférences

	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re--qualif.
2019	248	27	13	34	2	324	27 (8,3%)
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)
2021	175	42	9	24		250	11 (4,4%)

Tableau 2 – Professeur des universités

	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re--qualif.
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)
2021	20	3	1	1	1	26	3 (11%)

1.2 – Congés pour recherche et conversion thématique

Rappelons que les CRCTS sont attribués de deux façons différentes : par les sections CNU sur un contingent national, et par les établissements (dans un second temps) sur un quota qui leur est propre. Le CNU25 disposait en 2021 de 7 semestres de CRCTS à distribuer : cela reste peu même si les demandes, au nombre de 52, sont un peu en baisse, conséquence probable des incertitudes liées à la crise sanitaire. Les demandes au titre des retours de congé maternité qui avaient pu être traitées sur un contingent supplémentaire en 2020 ont dû être réintégrées dans le contingent national cette année. Nous regrettons que le progrès de 2020 n'ait pas eu de suite, le cabinet du MESRI ayant donné des assurances aux représentants du CNU qui n'auront pas été suivies d'effet dans les établissements, faute d'instructions sans ambiguïté de la part de la DGESIP.

La section a privilégié dans son examen des dossiers les demandes s'appuyant sur un véritable projet, que ce soit un déplacement de longue durée, la préparation de l'HDR, ou un virage scientifique.

Bénéficiaires : Léa Blanc-Centi, Sylvain Courte, Pierre Debes, Giuseppe Dito, Philippe Eyssidieux, Mickael Matusinski, Tamara Servi.

2. Avancement de grade

La session « Avancement de grade » a vu le retour en présentiel et s'est tenue du 5 au 7 juillet 2020, accueillie par l'UFR de mathématiques de Sorbonne Université, remerciée ici pour son accueil et son assistance matérielle.

Chaque dossier est étudié par deux rapporteurs désignés au préalable par le bureau, et l'évaluation tient principalement compte des activités réalisées depuis la dernière promotion obtenue. La section est attentive à l'équilibre des dossiers entre recherche, enseignement, responsabilités administratives, encadrements, diffusion, etc. Elle apprécie les informations détaillées sur le devenir et les publications des doctorants, la liste des interventions dans les conférences, ou encore la teneur exacte des responsabilités administratives pour pouvoir en apprécier l'importance. Elle favorise également la qualité des publications sur leur quantité. Les congés maternité ou maladie longue durée, plus généralement les événements pouvant impliquer un retard de carrière sont à indiquer de façon qu'il puisse en être tenu compte à leur juste hauteur. Enfin, les dossiers non promus n'ont pas été accompagnés d'un avis détaillé, suivant la pratique établie par les sections précédentes.

À l'heure où ce compte-rendu part sous presse, la DGRH du MESRI a annoncé, lors d'une réunion informelle avec le bureau de la CPCNU, la disparition prochaine du contingent national de promotions pour les enseignant-chercheurs, prétextant d'une mise en conformité avec la loi de transformation de la fonction publique de 2019, qui a mis fin aux prérogatives de gestion des carrières pour les commissions administratives paritaires. La session 2022 se tiendra normalement et son calendrier est déjà disponible sur le site du ministère. Il est, malheureusement, à craindre que cette session 2022 ne soit, potentiellement, la dernière où les sections CNU seraient en position de faire des propositions classées de promotion, par opposition à un système futur qui verrait les sections émettre des avis sur chaque dossier, comme cela sera le cas dans le cadre des opérations de repyramidage prévues par le protocole de revalorisation, et où les établissements se verraient attribuer la totalité du contingent de promotions de grade, à charge pour eux de tenir compte des avis consultatifs émis, d'une part par le CNU, d'autre part par leur CAC.

TABLEAU 3 – Panorama

	MCHC	MCE	PR1	PRCE1	PRCE2
Candidats	67	44	50	54	28
dont candidates	11 (16%)	5 (11%)	3 (6%)	6 (11%)	2 (7%)
Promus	20	9	8	9	7
dont promues	4 (20%)	2 (22%)	0 (0%)	1 (11%)	0 (0%)

Conformément à l'engagement pris à l'unanimité en début de mandat, aucun membre du cnu n'a été proposé par la section à la promotion. Il convient, en outre, d'interpréter les données de genre avec précaution : cette année, parmi les candidates pour une promotion pr1 ou prce1, un tiers siégeait en section (et n'a donc pas fait l'objet d'un examen approfondi, au titre de l'engagement rappelé ci-dessus). Au delà, une consultation de la liste des potentielles promouvables au grade de pr1 en 2021, via les données fournies par le mesri, montre que les collègues féminines qui n'ont pas candidaté sont toutes membres de la section cnu25. Cela illustre, s'il en était besoin, le déséquilibre maintes fois souligné dans le corps des pr.

2.1 – Promotion à la hors classe des maîtres de conférence

Les promotions à la hors classe présentent un éventail large de candidats aux profils variés. L'ensemble des activités est pris en compte et un investissement continu au cours de la carrière, dans des directions pouvant évoluer, est prépondérant. Le cnu est attentif à une répartition harmonieuse dans les différentes catégories d'âges et d'avancement de carrière des candidats retenus. L'obtention de l'hdr est un réel atout, sans être un pré-requis.

Liste des promus : Aubrun Guillaume, Audoux Benjamin, Bernardara Marcello, Chicourrat Monique, Darniere Jack-Luck, Dell'Ambrogio Ivo, Fillastre Francois, Fima Pierre, Florence Mathieu, Gille Catherine, Gosselin Pierre, Jammes Pierre, Joly Romain, Kuznetsova Yulia, Lebacque Philippe, Petkova Violeta, Rigat Stéphane, Simon Stéphane, Tossici Dajano, Wolff Maxime.

2.2 – Promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » des maîtres de conférence

La promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » est en place depuis 5 ans et n'a pas encore tout à fait atteint sa vitesse de croisière. Cet échelon doit représenter dans 2 ans 10% de l'effectif du corps des Maîtres de conférences (classe normale et hors classe). Les promotions proposées résulteront alors uniquement du flux sortant, principalement composé des départs à la retraite.

Si l'âge a été déterminant pour les premières promotions à l'échelon exceptionnel afin d'assurer un renouvellement régulier, le rajeunissement du vivier des candidats conduit à des profils de premier plan en recherche, en partie provoqué par la pénurie de postes de professeur. Face à cette pression forte, la section reste attentive à promouvoir également des profils plus âgés, notamment pour continuer à assurer un roulement dans les années qui viennent. Le critère d'âge n'est cependant pas exclusif, chaque dossier étant étudié soigneusement, et son importance sera probablement amené à encore diminuer dans les années qui viennent. La section a vu apparaître cette année des dossiers d'excellente qualité, qui n'étaient pas précédemment candidats : il convient de ne pas pratiquer d'auto-censure sur les candidatures.

Liste des promus : Bayad Abdelmejid, Benhida Chafiq, Blanloeil Vincent, Caldero Philippe, Fauquant-Millet Florence, Koufany Khalid, Lancien Florence, Leplaideur Renaud, Traizet Martin.

2.3 – Promotion à la première classe des professeurs

La promotion à la première classe des professeurs continue d'être soumise à une pression extrêmement forte, rendant les choix particulièrement difficiles. La qualité scientifique, attestée par les publications, le rayonnement et l'animation scientifique, l'encadrement doctoral, les responsabilités administratives et pédagogiques importantes sont des éléments clés. Les candidats sont appelés à rédiger leur dossier de façon à mettre clairement en avant toutes leurs activités saillantes. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur sont privilégiés.

Liste des promus : Brugallé Erwan, Ginot Grégory, Letellier Emmanuel, Macri Emanuele, Mc Shane Gregory, Paicu Marius-Gheorghe, Ritzenthaler Christophe, Sodaigui Bouchaib.

2.4 – Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

La promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs récompense les collègues qui se sont distingués dans leurs activités tout au long de leur carrière. On y évalue l'importance des contributions scientifiques, des services rendus à la communauté, l'influence de l'ac-

tivité de formation doctorale. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur première classe sont privilégiés.

Liste des promus : Barral Julien, Calaque Damien, Häfner Dietrich, Marin Ivan, Meigniez Gaël, Pichon Anne, Popescu-Pampu Patrick, Sabourau Stéphane, Vuillon Laurent.

2.5 – Promotion au second échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

Le principal critère pour cette promotion, lorsque l'activité scientifique est incontestable, est l'ancienneté dans le grade, avec une barre se situant actuellement entre la cinquième et la sixième année.

Liste des promus : Bilu Yuri, Boritchev Alexandre, Chambert-Loir Antoine, De La Brétèche Regis, Heurteaux Yanick, Merel Loïc, Tomanov Georges.

3. Primes d'encadrement doctoral et de recherche

La session d'examen des demandes de PEDR, qui s'est tenue à Toulouse du 30 août au 1er septembre, est a priori la dernière suivant le format actuel de la PEDR : la mise en place du RIPEC et d'un nouveau régime de primes, prévu par le protocole de revalorisation associé à la LPR, se fera dans le courant de 2022. Les sections CNU ne disposent d'aucune information fiable à ce sujet à l'heure actuelle, les textes n'ayant pas été publiés à ce jour (décembre 2021). La section remercie le département et l'institut de mathématiques de Toulouse pour leur accueil, malgré les conditions sanitaires toujours compliquées. Comme la session des promotions, cette session s'est déroulée, fort heureusement, en présentiel, ce qui a permis une meilleure qualité de discussion.

Rappelons que ce n'est pas le CNU qui attribue les PEDR : les sections rendent une série de « notes d'item » sur chaque dossier, libellées Publications, Encadrement, Diffusion, Responsabilités, ainsi qu'un avis global qui, contrairement aux notes d'item, est soumis à quota. Ces quotas sont appliqués séparément pour chaque corps : ainsi, pour 80 dossiers PR examinés (un recul de 20% par rapport à 2020), nous disposions de 16 avis globaux A, 24 avis globaux B, et 40 avis globaux C. Les quotas étaient de 21 A, 30 B pour 103 dossiers MCF examinés (avec 52 C). Ces quotas sont donc calculés sur le nombre de demandes déposées, et non pas sur le nombre de candidats éligibles à faire une demande (contrairement aux promotions de grade). Pour mettre ces données en perspective, il y a environ 500 PRS en activité en section 25, ainsi que 850 MCFS. Il y a donc une très forte auto-censure, notamment chez les MCFS.

La section considère que la quasi-totalité des dossiers examinés ont une activité scientifique avérée, de bonne voire très bonne qualité. La très grande majorité des dossiers présente également un profil émargeant à tous les items (seul un dossier véritablement exceptionnel sur un item peut espérer rattraper un manque sur un autre… ces dossiers sont très rares). Il faut donc comprendre la bien mal choisie notation globale C comme signifiant « dossier qui a été considéré comme étant dans la seconde moitié de ceux examinés cette année », et rien d'autre.

Nous n'avons pas, à ce jour, les résultats définitifs suite à l'examen dans les établissements. Rappelons qu'il y a de grandes disparités dans le traitement fait par les établissements pour les notes B, sans parler de la prise en compte très variable des notes d'item. Le CNU n'a aucune prise sur ces décisions, et les critères établissement peuvent de surcroit changer d'une année sur l'autre, par un vote du CAC. La section, qui n'est pas décisionnaire, travaille en aveugle, tandis que les candidats malheureux ont le sentiment compréhensible d'avoir été sous-notés ou maltraités. La section déplore à nouveau un tel système, générateur de frustrations de tous ordres. Il faut espérer que le futur système issu du RIPEC sera plus lisible.

Tableau 4 – Panorama parité

	MC	PR
Candidats	103	80
dont candidates	13 (12,6%)	3 (3,7%)
20%	21	16
dont candidates	4 (19%)	1 (6,2%)
30%	31	24
dont candidates	3 (9,7%)	0 (0 %)
50%	52	40
dont candidates	6 (11,5%)	2 (1%)

Le bureau de la section

Bilan 2021 du CNU section 26. Deuxième année du mandat 2019-2023

Le Conseil National des Universités (CNU) a poursuivi ses travaux pour sa deuxième année (mandat de quatre ans).

Rappelons que la section 26 est composée de 48 membres titulaires (dont 16 nommés) et de 48 membres suppléants (dont 16 nommés); elle compte une moitié de rangs A et une moitié de rangs B; elle est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CNU [1].

La section dispose également d'un site propre http://cnu26.emath.fr.

L'effectif théorique a été atteint à la rentrée 2020; certains membres MCF nous quittant pour la rentrée 2021 grâce à des passages PR, des renouvellements partiels sont en cours.

1. Motions et avenir du CNU

1.1 – Motions votées en février 2021

Motion « Suivi de carrière » (reconduite le 09/02/2021). Les sections 25 et 26 ont décidé de reconduire la décision prise depuis 2017, de ne pas mettre en place le suivi de carrière en 2020.

« *Les sections 25 et 26 décident de ne pas mettre en place le suivi de carrière : faute d'une définition précise des objectifs, des modalités et de l'allocation de moyens dévolus à cette nouvelle mission, celle-ci ne peut être mise en œuvre jusqu'à nouvel ordre.* »

Par ailleurs, l'hiver a été fertile en événements concernant notre métier, puisque la LPR (Loi de Programmation de la Recherche [2]) a été votée le 24 décembre 2020. Elle a rendu immédiatement applicable un amendement modifiant les conditions de qualifications aux fonctions de Professeur des Universités, ajouté subrepticement dans la loi la nuit du 27 octobre de début du deuxième confinement, par un sénateur très au fait des arcanes de notre travail. La question aurait mérité *a minima* d'être discutée, car elle rend notre statut de moins en moins national; néanmoins, les « consultations » ouvertes *par la suite* montrent que cela aurait effectivement été inutile. Un groupe de travail de la section 26 a contribué à cette réflexion et rendu ses avis, consultables sur le site http://cnu26.emath.fr/. Les conclusions du rapport général remis au ministère sont quant à elles lisibles sur https://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/Ressources_humaines/95/6/21_04_26_Rapport_Concertation_1402956.pdf.

Les dossiers qui avaient été déposés par les candidats et s'étaient vus attribuer, fin novembre, deux rapporteurs membres du CNU (nombre d'entre eux avaient commencé/fini leurs rapports) ont ainsi été rendus inaccessibles début janvier 2021 dans l'application Galaxie. Plus précisément, le 8 janvier 2021, les candidats maîtres de conférence titulaires ont été avertis par un courrier électronique qu'ils n'avaient plus besoin de qualification aux fonctions de Professeur; ensuite, le même jour à 18h30, la présidente du CNU26 a reçu un mail lui communiquant également cette information, et lui demandant d'en informer sa section.

Motion 1 de la section 26. Votée à l'unanimité de la session plénière (49 présents) le 09/02/2021.

– *Alors que les conditions sanitaires nous ont poussés à réinventer notre métier d'enseignants-chercheurs depuis plus d'un an, en nous surchargeant de travail, notre ministère continue, de manière unilatérale et sans réelle concertation, à prendre des décisions préjudiciables aux étudiants et aux personnels.*
– *Nous regrettons vivement que notre statut, via les dernières modifications de la loi, soit de moins en moins national. Le CNU est garant de cet aspect, l'en dépouiller n'est pas anodin.*

1. https://www.conseil-national-des-universites.fr
2. Voir https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/pid39124/loi-de-programmation-de-la-recherche-2021-2030.html

- *Nous sommes solidaires des actions engagées par la CP-CNU, visant à davantage de concertation.*
- *Nous appelons les collègues à faire « grève de comité Hcéres » .*

Des propositions de rétention de résultats de qualification ont été proposées mais non retenues, par souci de ne pas pénaliser les collègues ou futurs collègues. La mesure de grève des comités Hcéres a été adoptée en compromis et en comptant sur une solidarité des responsables scientifiques de cette autorité administrative indépendante, qui ne s'est pas produite. Pour l'essentiel, les comités Hcéres se sont déroulés sans membre du CNU, cette année.

Motion 2 – PEDR – de la section 26. Votée à l'unanimité de la session plénière (49 présents) le 9/02/2021

« Le CNU26 s'inquiète de la grande hétérogénéité de traitement par les universités des évaluations rendues par le CNU sur les PEDR. Les dossiers sont globalement excellents; le faible nombre de primes, géré par les seuls quotas, génère des injustices flagrantes et néfastes. Le CNU 26 désapprouve vivement l'algorithme de classement mis par le ministère au service des universités. »

De fait, il est possible d'étudier les modalités d'attribution de chaque établissement, tenu de fournir cette information (attention, certains pdf datent de plusieurs années et concernent des Universités qui n'existent plus!) en consultant le site du Ministère : `https://www.galaxie.enseignementsup-recherche.gouv.fr/ensup/cnu_pedr.htm` À cette disparité s'ajoute ce qui est mentionné dans la motion ci-dessus comme « l'algorithme » du ministère qui propose aux universités un interclassement des candidats pour l'ensemble des sections CNU : il est fondé sur une repondération des notes dépendant de la fréquence d'occurrence des lettres A, B, C attribuées en notes intermédiaires par une section donnée. Le principe est que si une section attribue beaucoup de notes A, cette note vaut beaucoup moins que le A d'une section qui en attribue peu. On travaille ainsi à front renversé et on évalue la sévérité des CNU, en partant du principe que les qualités des candidats sont équivalentes dans les différentes sections (ce qui est cohérent avec les quotas). Nous laissons le lecteur méditer sur la stratégie optimale sur ce point; elle est néanmoins perturbée par la disparité des critères locaux.

Ainsi en 2020, 11 PR sur 38 classés en 30% n'ont pas eu la PEDR, ainsi que 7 MCF sur 58.

1.2 – Motion votée le 19 mai 2021

Sur incitation de nos collègues de l'université Lyon 1, le CNU 26, réuni en session plénière le 19 mai 2021, a voté à l'unanimité la motion suivante :

« Le CNU26 demande au Président de la République française, au Ministre des affaires étrangères, à la Ministre de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation de tout mettre en œuvre pour que notre collègue Tuna Altinel, enseignant-chercheur et fonctionnaire, en poste au sein de l'université Claude Bernard - Lyon 1, puisse revenir en France dans les plus brefs délais. »

Notre collègue Tuna Altinel est rentré en France (et à Lyon) le 11 juin 2021 [3].

1.3 – Les évolutions en cours et l'avenir du CNU - Le point de l'assemblée générale de la CP-CNU du 18 juin 2021

L'assemblée générale de la commission permanente du CNU a permis de faire le point sur les évolutions en cours, notamment concernant le rôle du CNU. Nous mentionnons deux points, le « repyramidage », qui semble en cours d'étude, et la réforme de la PEDR.

– Le projet de décret « repyramidage » a pour objectif de créer une *voie de promotion interne temporaire* visant à rééquilibrer le ratio MCU/PU (passer de 70/30 à 60/40). Cela représenterait au total 400 promotions par an sur 5 ans (2021-2025). Les conditions de candidature seraient : avoir 10 ans d'ancienneté dans le corps des MCU, être titulaire de l'HDR. Une répartition annuelle des promotions attribuées aux établissements serait effectuée par le ministère, prenant en compte le ratio MCU/PU de l'établissement et en respectant, au niveau national, un ratio de 3 MCU HC promus pour 1 MCU CN. La procédure serait : 1. L'établissement répartit par discipline les possibilités de promotions qui lui ont été notifiées. 2. Le CAC examine les candidatures et transmet ses avis à la section compétente du CNU. 3. Le CNU retourne sur chaque dossier un avis « très favorable », « conforme » ou « réservé ». 4. Le Président de l'établissement prend la décision finale.

– La PEDR disparaitrait pour être intégrée

3. Voir `http://math.univ-lyon1.fr/SoutienTunaAltinel/`

au « ripec » (Régime Indemnitaire des Personnels Enseignants-Chercheurs). Des primes de fonctions seraient créées, ainsi qu'un système de prime individuelle, liée à la qualité des activités et à l'engagement professionnel des *agents* en regard de l'ensemble des missions définies pour les enseignants-chercheurs. La demande serait faite au titre d'un, deux ou tous les volets du métier (pédagogie, recherche, responsabilités collectives). Les candidatures individuelles seraient déposées sur Galaxie, avec lettre de motivation (précisant au titre de quel(s) volet(s) du métier la demande est faite). Le cac désignerait 2 rapporteurs locaux pu, puis délibèrerait, émettrait des appréciations que le Président transmettrait au cnu. Le cnu examinerait chaque dossier et rendrait un avis « très favorable », « conforme » ou « réservé » sur l'appréciation du cac. Le Président ou le directeur de l'établissement arrêterait enfin les décisions individuelles d'attribution (motif, montant...) en respectant un montant global pour l'établissement fixé par le mesri. La période de référence de l'évaluation porterait sur les trois années précédant la candidature ; la prime serait attribuée pour une durée de trois ans. Au terme des 3 ans, nul ne pourrait demander à bénéficier d'une nouvelle prime pour le même motif avant un délai d'un an. Ce délai de carence serait supprimé si la prime était demandée et attribuée pour un motif différent.

Notons que, si le cnu n'est pas décisionnaire concernant la pedr actuelle, il établit néanmoins une première liste résultant d'évaluations par des pairs compétents sur le domaine du candidat ; ce sont ensuite les établissements qui prennent les décisions finales. La procédure en cours d'installation va nécessiter un effort d'évaluation important de la part des établissements, et demander aux cnu de conforter ou de *réprouver* des décisions presque prises. La réprobation sera un nouvel exercice bien délicat pour lui !

2. Bilan de la session qualifications

Même si les candidats ont connaissance des deux rapporteurs désignés par le bureau de la section, il est important de préciser que la décision de qualification, ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter à celle-ci les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification. Les membres du cnu présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient proches.

Les critères de qualification ne sont pas toujours bien connus des candidats, ceux-ci sont invités à les consulter sur les pages web mentionnées ci-dessus.

Depuis 2018 les candidats déposent leur dossier en ligne et la recevabilité des dossiers est étudiée par le ministère, au fur et à mesure du dépôt des pièces par les candidats et alors que les rapporteurs ont déjà accès au dossier. Plusieurs candidats ont vu leur dossier déclaré irrecevable par le ministère parce qu'il manquait une attestation du diplôme de thèse, *le procès verbal ne suffisant pas* ou, dans le cas de candidats étrangers, du fait de l'absence de traduction du diplôme. Il est à noter qu'une traduction par le candidat lui-même est suffisante. La souplesse dont faisait preuve la section lorsque l'examen de la recevabilité lui incombait n'est plus de mise, et des erreurs parfaitement bénignes ne sont plus rattrapables (la saisie de décision sur ces dossiers est bloquée par Galaxie).

2.1 – Qualification aux fonctions de Maître de Conférences

La session de qualification s'est tenue à distance ; l'ihp, qui devait accueillir les réunions, était fermé pour raison sanitaire, et n'a pas même été en mesure d'accueillir les quelques membres du bureau élargi présents pour la gestion des fichiers et de la session distancielle.

Résultats de la session 2020-21. Nombre de dossiers : 425 (contre 450 en 2020). Irrecevables ou non transmis : 48.

Le nombre de dossiers mcf effectivement examinés par la section a été de 377, en baisse par rapport à 2020 (407, et 405 en 2019).

Hors-section : 95. Non qualifiés : 38. Qualifiés : 244.

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers examinés est de 65% (contre 66% en 2019).

Critères de qualification. Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section.

– D'une part l'aptitude à enseigner toutes les mathématiques de licence. Attention, certains candidats omettent complètement la rubrique « enseignement » et son absence totale peut

entraîner un refus de qualification. L'enseignement est une partie importante de notre métier, le point doit être mentionné, que ce soit pour faire part d'une expérience, ou pour expliquer pourquoi celle-ci n'a pas pu avoir lieu.
– D'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir :

1. des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification ;
2. des publications. Si la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes ;
3. l'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considérée comme suffisante à elle seule pour la qualification en Section 26 (c'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26e section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Enfin, il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

2.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

Résultats de la session 2020-21 En ce qui concerne les PR, le nombre de dossiers en 2021 était de 147 (contre 126 en 2019-20); deux rapporteurs ont été attribués à chaque dossier fin novembre, mais la promulgation de la LPR le 24 décembre 2020 (comment se lasser de cette date !), a fait disparaître les dossiers des collègues maîtres de conférences des universités titulaires.

Le nombre de dossiers est passé à 49 (52 dont 3 non transmis), parmi lesquels 8 dispenses refusées (il s'agit de dossiers de candidats en poste à l'étranger, sans HDR, dont la section a estimé qu'ils ne correspondaient pas à l'attente pour une HDR de Mathématiques Appliquées). Ainsi 41 dossiers ont été examinés, 38 ont été qualifiés, 1 est non qualifié, 3 ont été classés hors section.

Le pourcentage de dossiers qualifiés est de 78%, le même qu'en 2019.

Le bureau renvoie au compte-rendu de l'an dernier pour les critères de qualification aux fonctions de Professeur [4] (groupe 5).

3. Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique

Les semestres de CRCT ont été attribués en février, lors de la session qualifications. Il y a eu 17 candidats PR et 50 candidats MCF, pour un contingent de 10 semestres à attribuer.

Liste principale (3 PR et 7 MCF) : Cardaliaguet Pierre, Chaumont Loïc, Chenavier Nicolas, Cluzeau Thomas, Lambert Amaury, Maugis-Rabusseau Cathy, Omer Jérémy, Petcu Madalina, Richard Alexandre, Tine Léon Matar.

Liste complémentaire : 11 : Petitfour Edith, 12 : Gravejat Philippe, 13 : Manou Abi Solymmawak, 14 : Souplet Philippe, 15 : Louis-Rose Carole, 16 : Ouvrier Buffet Cécile, 17 : Lebovits Joachim, 18 : Antoine Xavier, 19 : Lim Thomas, 20 : Besse Christophe, 21 : Ainseba Bedr Eddine.

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie particulièrement les dossiers comportant des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil

4. Voir aussi le site `http://cnu26.emath.fr` ou celui des CNU

favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé.

Il est indispensable que les CRCT et délégations passés des candidats soient clairement mentionnés. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

Notons que cette année, la rubrique spéciale apparue l'an dernier pour les demandes, visant à octroyer un CRCT suite à un congé de maternité/-paternité, a été maintenue. Cependant les dossiers ont été transmis aux CNU sans information sur un budget spécifique. Vu le faible nombre de semestres à attribuer, le CNU26 les a traités de la même façon que les autres, en comptant que les universités recevraient ensuite un financement spécifique, dont elles sauraient faire bon usage.

4. Promotions

La session « Avancement de grade » s'est tenue en mode hybride les 17, 18 et 19 mai 2021 à l'Université de Paris, Campus Saint-Germain des Prés pour les présents.

Les candidatures se font par voie électronique. Avant l'examen par le CNU, les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a maintenu son choix de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres. Les membres du CNU participant à la session ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Les réunions du bureau se sont tenues à distance. Les rapporteurs ne sont pas les mêmes d'une année sur l'autre (sauf parfois pour nos collègues en didactique, à cause du faible nombre d'experts au sein du CNU26).

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants.

- Le dossier de candidature à une promotion doit contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et **faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion**.
- En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
- En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier. Clairement, cette rubrique a subi des évolutions depuis deux ans.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent, par des éléments **chiffrés**, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Le bilan chiffré de la session promotions est résumé dans le tableau 1.

4.1 – Promotions à la hors-classe des MCF

Liste des promus : Azzaoui Nourddine, Beaugendre Héloïse, Bendahmane Mostofa, Busuioc Iftimie Adriana, Chevalier Etienne, Daouia Abdelaati, Durieu Olivier, El Alaoui Lakhnati Linda, Holweck Frédéric, Jouplin Aldéric, Knippel Arnaud, Krell Nathalie, Labart Céline, Lafaye de Micheaux Pierre, Lucas Carine, Mammeri Youcef, Péron Victor, Popier Alexandre, Roquain Etienne, Tempier Fréderick, Thiam Baba, Tordeux Sébastien, Toulemonde Gwladys, Verdière Nathalie, Vidal Alexandre, Weynans Lisl, Zindy Olivier.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

TABLEAU 1

	MCF HC	MCF EX	PR 1C	PR EX1	PR EX2
Candidats	93	38	74	74	51
dont Candidates	25	14	13	7	8
Promus	27	9	11	14	11
dont Promues	8	4	3	1	2
Ages min et max des promus	39-52	55-63	39-55	43-66	53-60

4.2 – Promotions à l'échelon MCF EX

Liste des promus : Belmiloudi Abdelaziz, Clément Emmanuelle, Fortier Natalie, Foucher Françoise, Girardin Valérie, Mahe Fabrice, Niang-Keita N'deye, Roux Jean-Christophe, Salam Ahmed.

L'effectif du nouvel échelon doit à terme représenter 10% de l'effectif du corps des MCF ; cet effectif doit être atteint au bout de 7 ans, cette année étant la cinquième. Au terme des 7 années, les promotions proposées résulteront uniquement du flux sortant des promus du corps des MCF, essentiellement par départs en retraites. C'est pourquoi la section a décidé, cette année encore, d'utiliser de façon importante, mais non exclusive, le critère de l'âge pour cette promotion. Ce critère tend à devenir de moins en moins important. Le critère de l'âge a été choisi plutôt que l'ancienneté dans le grade MCF-HC, et a été modulé au vu de l'investissement des candidats dans tous les aspects du métier d'enseignant-chercheur.

4.3 – Promotions à la première classe des PR

Liste des promus : Capdeboscq Yves, Gouere Jean-Baptiste, Gozlan Nathaël, Guilloux Agathe, Hillairet Matthieu, Lesourd Clausel Marianne, Merigot Quentin, Mougeot Lannou Mathilde, Panloup Fabien, Turpault Rodolphe, Wintenberger Olivier.

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme Professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activités et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le CNU est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression très forte sur ce type de promotion, les candidats qui étaient professeurs depuis au moins trois ans ont été privilégiés. Cette promotion est clairement celle où l'embouteillage est devenu le plus critique.

4.4 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Bouclet Jean-Marc, Cadre Benoit, Carmona Philippe, Coudière Yves, Dambrine Marc, Dedecker Jérôme, Delon Julie, Francq Christian, Guessab Allal, Lewandowski Roger, Liu Quansheng, Mathieu Pierre, Oudet Édouard, Robert Frédéric.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils se soient particulièrement distingués dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus et a privilégié les candidats qui étaient professeurs de 1ère classe depuis au moins trois ans.

4.5 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Benzoni Gavage Sylvie, Bercu Bernard, Briane Marc, Dufour François, François Olivier, Iollo Angelo, Novotny Antonin, Perrier Valérie, Quincampoix Marc, Rio Emmanuel, Yassine Adnan.

Nous avons eu la grande tristesse d'apprendre le décès d'Antonin Novotny peu de temps après cette réunion. La promotion n'aurait dû être effective qu'en septembre prochain. Néanmoins, l'université de Toulon, sur la foi de notre procès-verbal de décision et par égard pour les ayants-droits d'Antonin Novotny, a eu la délicatesse d'accepter de rendre cette promotion effective dès le 1er juin, soit antérieurement à son accident.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle. Les candidats à cet échelon sont invités à accorder à leur dossier le soin requis pour permettre aux rapporteurs d'en faire une lecture autonome.

4.6 – Promotions hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2021 n'est pas encore disponible. En 2020, il y a eu en promotions locales :

Promotions MCF Hors classe (15) : Alili Smail, Andreoletti Pierre, Barrandon Matthieu, Yazourh Benrabah Ouafae, De Vittori Thomas, Doyen Laurent, Dury Marie-Eliette, Lemaire Vincent, Denis Lepinette Emmanuel, Maghnouji Abderrahman, Rahmouni Adib, Roussier Michon Violaine, Rouvière Laurent, Rozanova-Pierrat Anna, Torki Mounir.

Promotions MCF échelon exceptionnel (11) : Amodei Luca, Bennani Dosse Mohamed, Bouchon François, Caouder Nathalie, Charton Philippe, Debraux Laurent, Maire Sylvain, Nuiro Silvere Paul, Romon Pascal, Schmitt Didier, Vernhet Laurent.

Promotions PR 1re classe (12) : Abboud Blanchard Maha, Broutin Nicolas, De Saporta Benoite, Allassonniere Durrleman Stéphanie, Gardes Laurent, Latour Alain, Le Ny Arnaud, Maingot Stéphane, Poullet Pascal, Puel Marjolaine, Thomann Laurent, Zani Marguerite.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 1er échelon(18) : Ainseba Bedr Eddine, Alioum Amadou, Aussel Didier, Berglund Nils, Carbou Gilles, Dauxois Jean-Yves, Donati Martin Catherine, Enriquez Nathanaël, Gout Christian, Marin Jean-Michel, Matoussi Anis, Pommeret Denys, Coulon Prieur Clémentine, Raimond Olivier, Ruiz-Gazen Anne, Santambrogio Filippo, Schneider Dominique, Vostrikova Jacod Lioudmila.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 2e échelon (9) : Arnaudon Marc, Demengel Françoise, Guillou Armelle, Jourani Abderrahim, Prud'homme Christophe, Trélat Emmanuel, Turinici Gabriel, Vayatis Nicolas, Zambotti Lorenzo.

5. Bilan de la session PEDR

Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2019, toutes les universités l'avaient fait sauf 4 établissements (Corte, Toulouse 1, Sorbonne Université et l'École pratique des hautes études). Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Hormis la présidente de section, peu de membres du CNU ont participé à la fois à la session promotions et à la session PEDR en 2021.

La session PEDR s'est tenue en présentiel les 3 et 4 juin 2021, à l'Université de Paris, Campus Saint-Germain des Prés (seuls deux collègues MCF étaient à distance le 4 juin).

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories désignées par les seuls quotas qu'elles représentent : « 20% », « 30% » et « 50% ». Ces quotas doivent être respectés dans chaque corps : MCF et PR.

Comme les années précédentes, la section a procédé à un examen séparé des dossiers de candidats ayant postulé trois fois *consécutives* sans succès à la PEDR. Nous avons à cette fin demandé aux candidats qui étaient dans cette situation de le mentionner explicitement dans leur dossier de candidature. Ces candidats ont été classés dans les catégories 20%, 30% et 50% en fonction des notes intermédiaires uniquement.

Ceci concernait 13 dossiers MCF (sur 177), dont 2 ont été classés dans les 20% et 6 dans les 30%. Parmi les 140 dossiers PR, ceci concernait 14 dossiers : 2 de ces dossiers ont été classés dans les 20%, et 4 en 30%. Les classements ont été figés pour ne plus faire l'objet d'aucun arbitrage ultérieur.

En plus du classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attri-

buer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) pour chacune des rubriques **P** : Publications et production scientifique, **E** : Encadrement doctoral et scientifique, **D** : Diffusion des travaux, **R** : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20% », « 30% », « 50% ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Cette année, les membres du CNU 26 ont été encouragés à prendre connaissance des modalités de décisions des universités des candidats dont ils évaluaient le dossier. Encore une fois, les informations consultables à l'adresse `https://www.galaxie.enseignementsup-recherche.gouv.fr/ensup/cnu_pedr.htm` sont variées ; mais aussi parfois incomplètes ou obsolètes, ce qui est une infraction à la loi.

L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité ou de maladie pendant cette période, l'appréciation porte sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période).

5.1 – Fonctionnement de la section

L'examen des dossiers PEDR a eu lieu sur deux jours au mois de juin. Les membres du CNU présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches. Le bureau de la section avait nommé deux rapporteurs par dossier dans la spécialité du candidat.

Les notes intermédiaires A, B, C ont été attribuées en tenant compte de l'ancienneté des candidats, par souci d'inclure dans le dispositif de façon équilibrée les enseignants-chercheurs à tous les stades de leur carrière, et de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Ceci conduit à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Ce mode de fonctionnement n'est pas généralisé dans les autres sections du CNU.

Le niveau des dossiers déposés est globalement très bon et a conduit à classer dans les 30% plusieurs dossiers de recherche *de tout premier plan* et dans les 50% des dossiers de collègues *très actifs* effectuant bien leur métier selon les quatre critères. Être classé dans les 50% ne doit donc pas être interprété comme une appréciation négative, d'autant plus que de nombreux dossiers se situant à la limite des 30% sont de niveaux proches, et que donc l'ordre du classement entre eux comporte une part d'arbitraire inévitable.

Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme les précédentes, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à postuler.

La section a décidé d'attribuer les notes intermédiaires A, B, C sans tenir compte des quotas, afin qu'elles rendent réellement justice à la valeur du dossier dans une catégorie donnée. Cela aboutit naturellement à ce que des dossiers ayant des notes intermédiaires excellentes aient une note globale décevante. C'est le reflet du niveau élevé des dossiers de candidature déposés, et ceci est accentué par le fait qu'une faible proportion de collègues postule.

5.2 – Résultats de la session

Il y a eu cette année 177 candidats MCF et 140 candidats PR (contre 198 MCF et 126 PR en 2020) : les quotas imposés dans Galaxie par le Ministère étaient donc :

- 35 dans les 20%, 53 dans les 30% et 89 dans les 50% pour les MCF ;
- 28 dans les 20%, 42 dans les 30% et 70 dans les 52% pour les PR.

Sur les 177 candidats MCF il y avait 45 femmes. Il y a eu 8 femmes classées dans les 20% et 14 femmes dans les 30%. Nous avons remarqué une baisse importante du nombre de femmes candidates en 2021 (il y en avait 71 pour 198 candidats en 2020), comment ne pas relier cela à la pandémie...

Sur les 140 candidats PR il y avait 19 femmes. Il y a eu 3 femmes classées dans les 20% et 8 femmes dans les 30%.

Il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature *conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4.* Les candidates doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier.

5.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU 26 a rendu public sur le site du CNU `http://www.cpcnu.fr/web/section-26` et sur le site `http://cnu26.emath.fr/` des conseils aux

candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques **P** , **E** , **D** et **R**.

Ces quatre rubriques sont évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartient à l'une des trois catégories suivantes : mcf, pr2 ou pr1-prex, et selon l'ancienneté du candidat dans sa catégorie. Pour les maîtres de conférences récemment nommés les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire… sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes mcf particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes mcf, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (**E**) et responsabilités scientifiques (**R**) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilité administrative ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un pr2 et surtout d'un pr1-prEX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il est anormal qu'un pr ne prenne pas sa part d'activités administratives, la même analyse sera appliquée aux mcf « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Comme dans le cas des dossiers de promotion, nous attirons l'attention sur les points suivants : 1) En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications. 2) En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Conclusion

Cette deuxième année s'est encore déroulée dans des conditions difficiles et très évolutives, mais l'ensemble des principes hérités du précédent cnu ont été respectés.

Cependant, les menaces sur les missions nationales des cnu s'accumulent. La qualification des Professeurs peut être considérée comme un détail, mais les modalités de sa suppression ont été pour le moins cavalières et le signe d'un manque de considération pour les cnu de la part de certains. C'est regrettable, car les cnu travaillent en marge des tensions locales et en suivant des principes de déontologie et d'équité que leur statut national lui permet. Le partage des promotions à 50% entre les cnu et les universités n'est pas un obstacle à l'autonomie de ces dernières mais un élément national de nos statuts et une reconnaissance par les pairs dotée d'une valeur spécifique. C'est une capacité de prise de recul salvatrice et une garantie de notre liberté académique et de pensée ; supprimer cette possibilité d'avancement ne permettra pas de donner plus de ressort à la recherche, au contraire.

Les fondements du fonctionnement du cnu sont la collégialité et la transparence, assurée par la publication de critères précis et de bilans. Il est également important que les collègues le perçoivent comme une institution proche d'eux. Les collègues souhaitant un retour sur l'examen de leur cas par la section, soit qu'il en contestent le résultat, soit qu'ils souhaitent des conseils personnalisés pour une candidature future, peuvent écrire à la présidente ou à un des vice-présidents.

Le bureau de la section

Rapport du CES40 de l'ANR

À la fin de son mandat d'évaluation de l'AAPG 2021, le Comité d'Évaluation Scientifique « Mathématiques » (CES40) a décidé d'écrire un rapport pour rendre compte à la communauté mathématique du travail effectué et souligner quelques points qui lui semblent importants au vu de l'AAPG 2022.

Pour l'AAPG 2021, le CES40 était formé de 14 membres, dont un président-référent et un vice-président qui en constituaient le bureau. Les membres du CES40 sont renouvelés chaque année, avec un mandat maximal de trois ans, choisis par le bureau en veillant à une large couverture thématique, à l'équilibre géographique et à la parité. Le travail du comité est accompagné par un chargé de projets scientifiques (Eugenio Echagüe) et par un responsable scientifique pour les mathématiques à l'ANR (Mamadou Mboup) en tant qu'observateur. Ils n'interviennent ni dans les débats scientifiques, ni dans les décisions qui portent sur la sélection des projets.

Le processus d'évaluation des projets est en deux phases : la première phase concerne l'évaluation des pré-propositions (instruments JCJC, PRC et PRCE), tandis que la seconde correspond à l'évaluation des projets détaillés sélectionnés en phase 1 et des projets PRCI. Ce processus a été décrit dans le rapport rédigé en 2019 par le CES40, disponible sur site de l'INSMI [1]. Nous renvoyons à ce document pour plus d'information, en soulignant ici quelques points qui nous semblent importants.

Dans les deux phases, la sélection des pré-projets et des projets détaillés est collégiale. Lors des réunions plénières, tous les membres du comité ont accès aux documents de soumission et aux rapports de tous les projets pour lesquels ils ne sont pas en conflit d'intérêts. Les questions d'impartialité dans le processus de sélection, comme l'absence de conflits d'intérêts, sont gérées très attentivement par l'ANR. Par exemple, pour éviter les conflits d'intérêts, tout membre du comité qui est dans le même laboratoire qu'un des membres d'un consortium ne rapporte par sur ce projet, n'a accès à aucun document ou rapport sur celui-ci et n'assiste pas aux discussions de ce projet. Cette règle s'applique bien évidemment aussi aux membres du bureau.

Cette année, la situation sanitaire a d'une part causé un décalage du calendrier d'évaluation d'environ un mois par rapport au calendrier usuel de l'ANR. D'autre part, elle n'a pas permis des réunions en présentiel : toutes les réunions du comité ont eu lieu à distance, avec un support technique adéquat de l'ANR, qui malgré les difficultés a permis un bon déroulement des discussions et de la gestion des conflits d'intérêts via des salles d'attente.

Le comité sélectionne les projets sur la base stricte des critères d'évaluation scientifique de l'AAPG publiés lors de l'appel d'offres. À ce sujet, on rappelle que le budget n'est pas un critère d'évaluation en phase 1. Toutefois, le montant d'aide demandé dans la pré-proposition conditionne le montant de la phase 2 : il est est donc important pour les déposants d'y réfléchir en amont en évaluant correctement les besoins du projet. En plus des qualités scientifiques du projet et de ses membres, les taux d'implication des membres ont un rôle important et doivent être renseignés avec soin. Chaque membre du consortium doit avoir sa place et son apport scientifique précisé. La même règle s'applique aux demandes en personnel doctorant ou post-doctorant, qui doivent être affectés à des tâches précises et identifiées du projet. Le comité évalue également la cohérence globale du projet : une collection de problèmes, si intéressants soient-ils, ne peut constituer un projet de recherche si une ligne directrice n'est pas mise en avant ainsi qu'une méthodologie claire proposant des pistes de recherche et une gestion des risques affichée.

Nous donnons maintenant quelques informations plus spécifiques sur les soumissions au CES40 et la sélection dans l'AAPG 2021. Le nombre des pré-projets déposés éligibles dans la phase 1 a baissé par rapport aux années précédentes, soit 61 (contre 77 en 2020 et 89 en 2019). Le montant total d'aide demandé en phase 1 était de 17,90 M€. L'aide allouée au CES40 en phase 2 a été de 4,19 M€. Le comité a retenu en 2e phase 17 projets, dont 9 JCJC et 8 PRC. Ces montants peuvent être comparés à ceux de l'année 2020, où l'aide demandée en phase 1 était de 18,99 M€ et l'aide allouée au CES40 en phase 2 de 3,86 M€. Pour information, le coût moyen d'un projet en 2021 était de 177 k€ pour un JCJC et de 324 k€ pour un PRC. Au moment de l'écriture de

1. https://www.insmi.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/anr-rapport-du-comite-40

ce rapport, le processus de sélection de l'AAPG n'est pas terminé, certains projets pouvant être financés jusqu'à la fin de l'année budgétaire.

L'appel à projet en cours, pour lequel la date limite de soumission des pré-projets est fixée au 28/10/2021, présente plusieurs nouveautés, dont le détail se trouve à l'adresse : `https://anr.fr/fr/detail/call/appel-a-projets-generique-aapg-2022/`. Une sélection de ces nouveautés, spécifiquement pour les mathématiques, est disponible dans une note d'information de l'INSMI à l'adresse : `https://www.insmi.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/le-plan-daction-2022-de-lanr`. Les nouveautés qui nous semblent importantes à souligner sont :

– la durée maximale des projets, qui est portée de 4 à 5 ans. Cette durée supérieure est une incitation à intégrer plus de demandes de recrutement de personnel doctorant au sein d'un projet;
– un nouvel instrument, les projets de recherche mono-équipe (PRME), qui permettent le financement de projets portés par une seule équipe ou un seul laboratoire.

La durée supérieure des projets répond favorablement à une demande exprimée par le CES40 et par les responsables des mathématiques auprès de l'ANR. Lors des AAPG 2020 et 2021, le CES40 a constaté un déficit de demande de recrutement de doctorantes et doctorants au sein des projets, les moyens étant alors dirigés vers le fonctionnement et les missions dans des proportions parfois surévaluées. On estime que ce déficit est lié surtout à la durée trop courte des projets qui ne permettent pas d'envisager de recruter sereinement du personnel de valeur. Un autre facteur peut être un effort des porteurs à limiter le budget des projets. Une telle démarche n'augmente pas les chances de succès d'un projet, pour lequel l'aide budgétaire demandée doit être adéquate aux besoins. Si parfois des coupes financières ont étés recommandées par le CES40 sur des montants qu'il a jugé surévalués, ce n'était jamais sur le personnel doctorant ou post-doctorant ayant un rôle bien justifié au sein d'un projet : au contraire, le recrutement et l'implication de jeunes sont considérés comme des aspects positifs. En conclusion de ce rapport, qui nous espérons a éclairé la communauté mathématique sur le travail que notre comité a effectué lors de l'AAPG 2021, nous souhaitons inviter nos collègues mathématiciens à se mobiliser et à se saisir des opportunités offertes par les projets de l'AAPG 2022 et leurs nouveaux formats, notamment en direction des jeunes via le recrutement de personnel doctorant et post-doctorant.

Le Comité d'Evaluation Scientifique « Mathématiques » (CES40)





Combinatorics: the Art of Counting
Bruce Sagan
American Mathematical Society, 2020. 304 p. ISBN : 9781470460327

Compter est un art multiforme. Ce livre le montre en présentant une large palette d'outils, en quelques 300 pages et huit chapitres dédiés chacun à une approche spécifique. En voici les titres, traduits ici en français pour cette recension. (1) Comptage de base. (2) Compter avec des signes négatifs. (3) Compter avec des fonctions génératrices ordinaires. (4) Compter avec des fonctions génératrices exponentielles. (5) Compter avec des ensembles ordonnés. (6) Compter avec des actions de groupes. (7) Compter avec des fonctions symétriques. (8) Compter avec des fonctions quasi-symétriques. Enfin, un Appendice offre une brève introduction à la théorie des représentations des groupes finis, incluant celles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et ses liens avec les partitions de n.
Ce livre est issu des nombreuses années d'enseignement de cette matière par l'auteur à l'université d'État du Michigan. Se voulant accessible dès le niveau Master, chaque chapitre commence par une introduction détaillée des objets considérés en partant de rien ou presque. Tout est abondamment motivé. Les exemples sont nombreux, et suivent parfois une preuve pour en illustrer le mécanisme. Le style est agréable, avec ici ou là quelques touches d'humour fort sympathiques. Avec ses nombreux exercices, le livre peut servir aussi bien d'étude individuelle que de support de cours ou de séminaire. On y trouve enfin plusieurs résultats récents, entre autres sur les quotients d'ensembles ordonnés ou sur les liens entre fonctions quasi-symétriques et permutations à motifs exclus.
Entamons maintenant, pour chaque chapitre avec son titre d'origine, une brève visite de quelques points représentatifs.

1. Basic Counting. Ce chapitre introduit et illustre quelques concepts de base, tels que ceux de *preuve bijective* ou encore d'*interprétation combinatoire*. L'idée ici est d'interpréter les termes d'une suite d'entiers positifs a_n comme les cardinaux d'ensembles finis A_n. Avantage : pouvoir prouver des égalités sur ces suites de façon conceptuelle plutôt que par manipulations mécaniques de formules. Cette approche est illustrée sur la suite de Fibonacci, inventée au XIIIe siècle comme premier modèle mathématique de croissance d'une population, de lapins en l'occurrence :

$$F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, \ldots$$

Bien connue, elle commence par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et chaque terme suivant est la somme des deux précédents : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Une interprétation combinatoire appropriée des F_n permet d'illustrer l'intérêt de cette démarche en prouvant de façon conceptuelle la formule $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n-1}$. Binet a donné au XIXe siècle une formule exacte pour les F_n en termes du nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$, un nombre loin d'être entier, lui. Comment passer de la formule de récurrence à la formule exacte ? Réponse plus loin dans le livre, avec les fonctions génératrices. Ce premier chapitre introduit de nombreux objets mathématiques qu'on cherche à dénombrer, en prenant soin de distinguer si l'ordre compte ou pas, et si les répétitions sont admises ou pas : permutations et mots, combinaisons et sous-ensembles, cycles dans les permutations, partitions d'entiers naturels, compositions, graphes et digraphes, chemins dans $\mathbb{Z}^2$, permutations avec motifs exclus, entre autres. C'est l'occasion de voir défiler toutes sortes de nombres célèbres : coefficients binomiaux, nombres de Bell, nombres

de Stirling de première et deuxième espèce, nombres de Catalan, etc. Dans la plupart des cas, des formules de récurrence sont données, pour être ensuite exploitées via les fonctions génératrices aux chapitres correspondants.

2. Counting with signs. Ce chapitre concerne des suites et formules faisant intervenir des nombres entiers négatifs. Par exemple, le fameux *principe d'inclusion-exclusion*, lequel exprime le cardinal d'une réunion d'ensembles finis comme une somme alternée. Ce principe est joliment illustré avec l'anecdote des fêtards. Ceux-ci déposent leurs chapeaux melons tous identiques au porte-manteau du bar, puis, une fois bien éméchés, les reprennent dans un joyeux désordre. Question : quelle est la probabilité qu'aucun fêtard ne se retrouve avec son propre chapeau ? La réponse, obtenue grâce au principe d'inclusion-exclusion, est étonnante : cette probabilité vaut $1/e \approx 0{,}37$, où e est la base du logarithme naturel. Parmi les nombreux autres points traités, on trouve l'involution de Garsia-Milne, inventée en 1981 pour fournir les premières preuves bijectives des identités de Rogers-Ramanujan concernant certains ensembles de partitions entières ; le lemme de Lindström-Gessel-Viennot, permettant de prouver que certains déterminants sont positifs grâce à leur interprétation combinatoire ; et le fameux *matrix-tree theorem*, qui exprime le nombre d'arbres couvrants du graphe complet à n sommets comme un déterminant.

3. Counting with ordinary generating functions. Étant donnée une suite de nombres a_n, sa *fonction génératrice ordinaire* est la série formelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. L'étude de cette série donne des informations précieuses sur la suite considérée. La puissance et la maniabilité de cette approche sont illustrées par une seconde preuve, très courte et presque magique, du théorème d'Euler selon lequel il y a autant de partitions de n avec parties distinctes qu'avec parties impaires. De nombreux autres cas sont considérés, par exemple les nombres de Fibonacci F_n et les nombres de Catalan $C(n)$, dont les fonctions génératrices donnent respectivement $x/(1-x-x^2)$ et $(1-\sqrt{1-4x})/2x$. Généralisant le cas des F_n, il est montré que les suites a_n satisfaisant à une relation de récurrence linéaire ont pour fonction génératrice une fraction rationnelle. Un autre thème notoire est la *réciprocité combinatoire*, phénomène dans lequel évaluer une fonction de comptage en un argument négatif donne lieu, au signe près, à une fonction de comptage pour d'autres objets que ceux d'origine. Un exemple concret est celui du *polynôme chromatique* $P(G;t)$, qui compte le nombre de coloriages propres en t couleurs des sommets d'un graphe fini G. De façon surprenante, l'évaluation de ce polynôme en $t = -1$ donne, au signe près, le nombre d'orientations acycliques de G – alors même que, comme le dit l'auteur avec une pointe d'humour, « ce que signifie colorier un graphe avec −1 couleurs n'est pas clair du tout ».

4. Counting with exponential generating functions. Dans certaines circonstances bien détaillées, il est préférable de considérer la *fonction génératrice exponentielle* de la suite a_n, définie comme étant la série formelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n/n!$. Par exemple, pour les nombres de Bell B_n, introduits au premier chapitre et comptant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, on ne connaît pas de formule close ; mais on a une formule exacte pour sa fonction génératrice exponentielle : c'est e^{e^x-1}. De nombreux autres exemples sont considérés, y compris les nombres d'Euler E_n comptant le nombre de *permutations alternantes* des entiers de 1 à n.

5. Counting with partially ordered sets. L'équivalent français de *partially ordered set* est *ensemble ordonné*. Par commodité, utilisons ici l'acronyme anglais *poset* – prononcer « possette ». Ce chapitre introduit la *fonction de Möbius* d'un poset. Elle généralise de façon élégante la fonction d'origine du même nom en théorie des nombres. Dans ce contexte bien plus général, cette fonction reste l'ingrédient principal du fameux *théorème d'inversion de Möbius*, un analogue discret du théorème fondamental de l'Analyse liant dérivée et intégrale, et une généralisation du principe d'inclusion-exclusion. Le chapitre introduit également, pour un poset P localement fini et contenant un plus petit élément, son *algèbre d'incidence* $I(P)$, définie comme l'ensemble des fonctions associant à tout intervalle dans P un nombre réel. L'inverse de la fonction de Möbius dans cette algèbre est la

fonction zêta, une généralisation de la fonction zêta de Riemann. Le chapitre se termine d'ailleurs par la fameuse *Hypothèse de Riemann*, suivie d'un énoncé élémentaire équivalent portant sur la *fonction de Mertens*, autrement dit sur les sommes partielles initiales de la fonction classique de Möbius.

6. Counting with group actions. Ce chapitre enseigne l'art de compter à symétrie près. Par exemple, combien y a-t-il de colliers à n perles noires et blanches ? Dans ce cas précis, on compte à rotation près. Plus généralement, étant donnée une action d'un groupe fini sur un ensemble fini, l'objectif est de compter le nombre d'orbites. Les outils et résultats développés incluent le lemme de Burnside et la théorie de Redfield-Pólya. Une application notable est l'expression, en termes du *cycle index*, de la fonction génératrice du nombre de graphes à n sommets non labellés. On y trouve également trois jolies applications à la théorie des nombres, avec des preuves, via actions de groupes, de congruences classiques modulo un nombre premier p : le petit théorème de Fermat, le théorème de Wilson selon lequel $(p-1)!$ est congru à -1 modulo p, et celui de Lucas donnant la classe modulo p des coefficients binomiaux.

7. Counting with symmetric functions. Les *fonctions symétriques* sont des séries formelles en une infinité de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ invariantes par toute permutation des variables. Elles interviennent dans divers contextes combinatoires, par exemple dans l'étude de la log-concavité, des tableaux de Young, du polynôme chromatique, etc. ; tous ces liens sont exposés ici. Leur ensemble constitue une algèbre notée Sym, dont plusieurs bases sont détaillées. Parmi celles-ci, la base des fonctions de Schur en termes des tableaux de Young semi-standards, leur expression via les déterminants de Jacobi-Trudi, et les liens intimes avec les représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On rencontre la belle *formule des crochets*, dénombrant les tableaux de Young standards de forme donnée. On a aussi un exposé détaillé de la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, associant à toute permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ une paire (P, Q) de tableaux de Young standards de même forme λ, pour λ une partition appropriée de n. On visite enfin les *posets différentiels*, et la *fonction symétrique chromatique* généralisant le polynôme chromatique.

8. Counting with quasisymmetric functions. Les *fonctions quasi-symétriques* sont elles aussi des séries formelles en une infinité de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$, mais invariantes seulement par les permutations des variables respectant l'ordre de leurs indices. L'ensemble QSym de ces fonctions est stable par produit et constitue donc, comme Sym, une algèbre. Mais la preuve de ce fait requiert de nombreux préliminaires. Une base de QSym est détaillée, faisant intervenir non plus les partitions de n mais ses compositions, où l'ordre compte. Ce chapitre montre entre autres l'implication des fonctions quasi-symétriques dans l'énumération des chaînes d'un poset, ainsi que des liens récents avec le dénombrement de permutations à motifs exclus.

En conclusion, pour qui souhaite s'offrir un panorama à la fois ample et détaillé de la combinatoire énumérative, ou en savoir plus sur des thèmes choisis – fonctions génératrices, théorie de Redfield-Pólya, fonctions de Schur, etc. – ou encore prendre connaissance des derniers développements dans cette matière, ce livre sera un atout précieux. Et, pour finir, on ne résiste pas au plaisir de citer la très humoristique dernière ligne de la préface : « Ayant moi-même tapé ce document, toutes les erreurs sont imputables à mon ordinateur. »

Shalom Eliahou
Université du Littoral Côte d'Opale



Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve Print – 733 rue St. Léonard 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.